Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2017/18

Abgabe: keine
Besprechung: keine

Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungszettel 13

Aufgabe 13.1: Kontradiktorische Mengen (4 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Es gibt eine Menge $M \subset AL(\Pi)$ und aussagenlogische Ausdrücke $\alpha, \beta \in AL(\Pi)$, so dass die folgenden vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

- $M \cup \{\alpha\}$ ist nicht kontradiktorisch.
- $M \cup \{\beta\}$ ist nicht kontradiktorisch.
- $M \cup \{\alpha, \beta\}$ ist kontradiktorisch.
- $\{\alpha, \beta\}$ ist nicht kontradiktorisch.

b) Sind $M \subset N \subset AL(\Pi)$ und M kontradiktorisch, so ist auch N kontradiktorisch.

Aufgabe 13.2: Ableitbarkeit (4 Punkte)

a) Geben Sie Herleitung im aussagenlogischen Kalkül aus der Vorlesung für

- $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$
- $\{\neg\beta, \neg\gamma\} \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$

b) Sei $\alpha \in AL(\Pi)$ und sei $M \subset AL(\Pi)$ eine Menge, die für jedes in α vorkommende Variablensymbol p entweder p oder $\neg p$ enthält. Beweisen Sie, dass dann schon $M \vdash \alpha$ oder $M \vdash \neg\alpha$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie für b) strukturelle Induktion, sowie die beiden Herleitungsregeln aus a).

Aufgabe 13.3: Freie Variablen (4 Punkte)

Bestimmen Sie für jeden der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke die Menge der in ihm enthaltenen freien Variablen (wobei k ein Konstantensymbol aus der zugehörigen Signatur sei):

a)
$$(\bigvee_x x \doteq y \vee x \doteq z)$$

b)
$$\neg \bigvee_x \neg x \doteq k$$

Aufgabe 13.4: Interpretationen (4 Punkte)

Sei die Signatur $\sigma = (\{s_1\}, \{f\}, \varnothing, \{c\}, typ)$ mit

$\text{typ}(f) = (s_1, s_1, s_1)$ und

$\text{typ}(c) = s_1$ gegeben.

Sei $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$.

Geben Sie eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ und eine Interpretation $\mathcal{I}$ für $PL(\sigma, V)$ in $\mathcal{A}$ an, die folgenden Ausdruck wahrmacht:

$$\neg(\neg v_0 \doteq v_1 \vee \bigvee_{v_2} \neg f v_2 c \doteq v_2)$$

Aufgabe 13.5: Substitution (4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Prädikatenlogischen Ausdruck:

$$\alpha = (\bigvee_x x \doteq y \vee \bigvee_y x \doteq y)$$

Geben Sie den Ausdruck β an, so dass $\mathrm{Subst}(\alpha, x, z, \beta)$ wahr ist und den Ausdruck γ an, so dass $\mathrm{Subst}(\alpha, y, z, \gamma)$ wahr ist.