

Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2016
Übungsblatt 08
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Montag 13.06.2016, bis 14:30 Uhr

Besprechung: 20.6-24.6.

- Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den oder die Namen angeben.
- Abgaben sind in Gruppen von bis zu 3 Personen möglich.

Aufgabe 1: Konvexe Hülle und Voronoi-Diagramme (4 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge von n Punkten in allgemeiner Lage und sei $r = |S \cap \text{ch}(S)|$ die Anzahl der Ecken seiner konvexen Hülle. Zeigen Sie, dass das Voronoi-Diagramm von S genau $2n - 2 - r$ Knoten und $3n - 3 - r$ Kanten besitzt.

Aufgabe 2: Eigenschaften des Voronoi-Diagramms (4 Punkte)

Zeigen Sie:

Das Voronoi-Diagramm $\text{VD}(P)$ einer Punktmenge P hat folgende Eigenschaften:

- a) Ein Punkt q ist Knoten des Voronoi-Diagramms $\text{VD}(P)$ genau dann, wenn der größte leere Kreis $C_P(q)$ mit q als Mittelpunkt drei oder mehr Punkte aus P auf dem Rand enthält.
- b) Der Bisektor zwischen zwei Punkten p_i und p_j aus P trägt genau dann zu einer Kante von $\text{VD}(P)$ bei (d.h. $p_i p_j$ ist eine Kante in der Delaunay-Zerlegung), wenn ein Punkt q auf dem Bisektor existiert, so dass $C_P(q)$ sowohl p_i als auch p_j auf dem Rand enthält aber keinen anderen Punkt aus P weder im Innern noch auf dem Rand liegt.

Aufgabe 3: Voronoi-Spezialfälle (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zu jedem $n > 3$ eine Menge von n Punkten in der Ebene existiert, so dass auf dem Rand einer Voronoi-Region $n - 1$ Knoten des Voronoi-Diagramms liegen.

Aufgabe 4: Voronoi-Diagramm (4 Punkte)

- a) Geben Sie das Voronoi-Diagramm, die Delaunay-Triangulierung und den minimalen Spannbaum der abgebildeten Punktmenge an. (Die Delaunay-Triangulierung ist der duale Graph des Voronoi-Diagramms!)
- b) Betrachten Sie das Voronoi-Diagramm der abgebildeten Punktmenge. Welche Voronoi-Regionen sind zu welchen benachbart, welche sind beschränkt bzw. unbeschränkt?
- c) Zeigen Sie, dass zu jedem $n > 3$ eine Menge von n Punkten in der Ebene existiert, so dass der Rand einer Voronoi-Region $n - 1$ Voronoi-Knoten besitzt.

