

# Offline Bewegungsplanung: Translation und Rotation

Elmar Langetepe  
University of Bonn

# Jetzt: Translation und Rotation!

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken
- Bewegung, Translation und Rotation gleichzeitig

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken
- Bewegung, Translation und Rotation gleichzeitig
- Startpunkt  $S$ , Endpunkt  $T$

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken
- Bewegung, Translation und Rotation gleichzeitig
- Startpunkt  $S$ , Endpunkt  $T$
- Kollisionsfreie Bewegung?

# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken
- Bewegung, Translation und Rotation gleichzeitig
- Startpunkt  $S$ , Endpunkt  $T$
- Kollisionsfreie Bewegung?
- Wie aufwendig ist die Berechnung? Untere Schranke!



# Jetzt: Translation und Rotation!

- Konvexer Roboter,  $m$  Ecken
- Polygonale Szene,  $n$  Ecken
- Bewegung, Translation und Rotation gleichzeitig
- Startpunkt  $S$ , Endpunkt  $T$
- Kollisionsfreie Bewegung?
- Wie aufwendig ist die Berechnung? Untere Schranke!
- Kann ich einen Weg angeben? Obere Schranke!

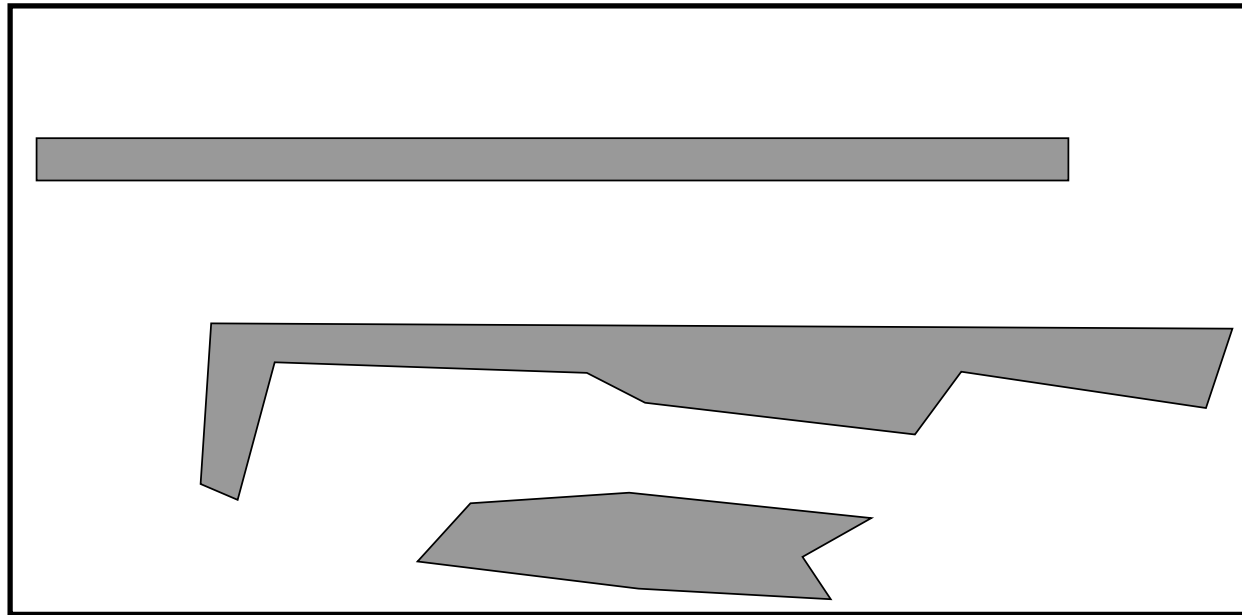
# Kapitel 2.3 Beispiel!

# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation

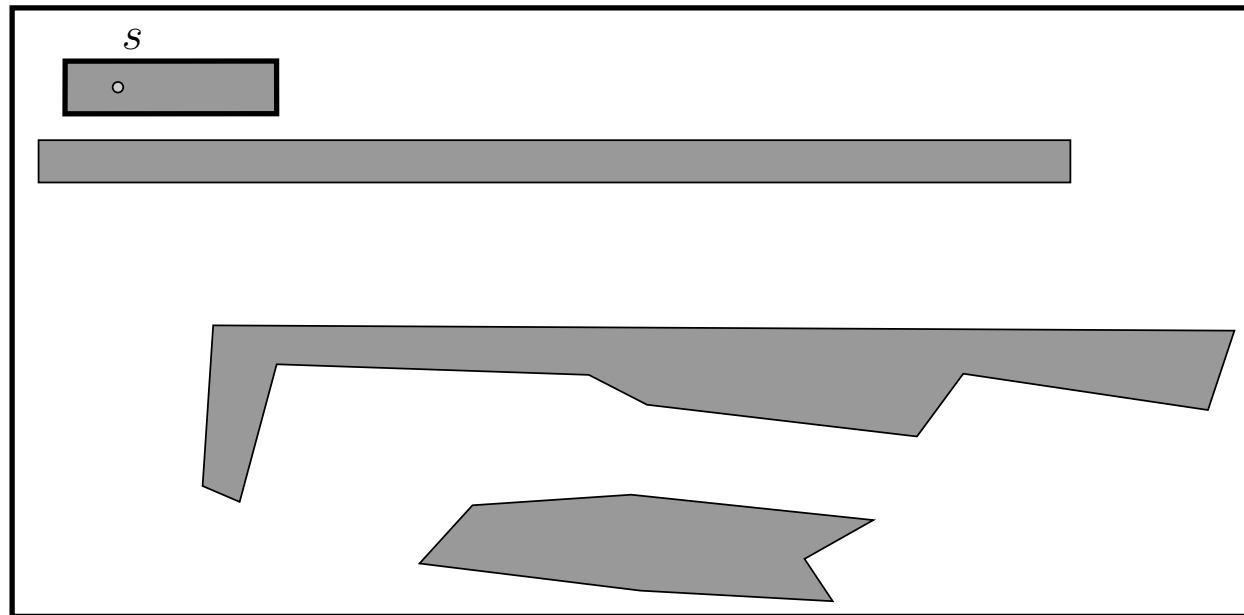
## Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



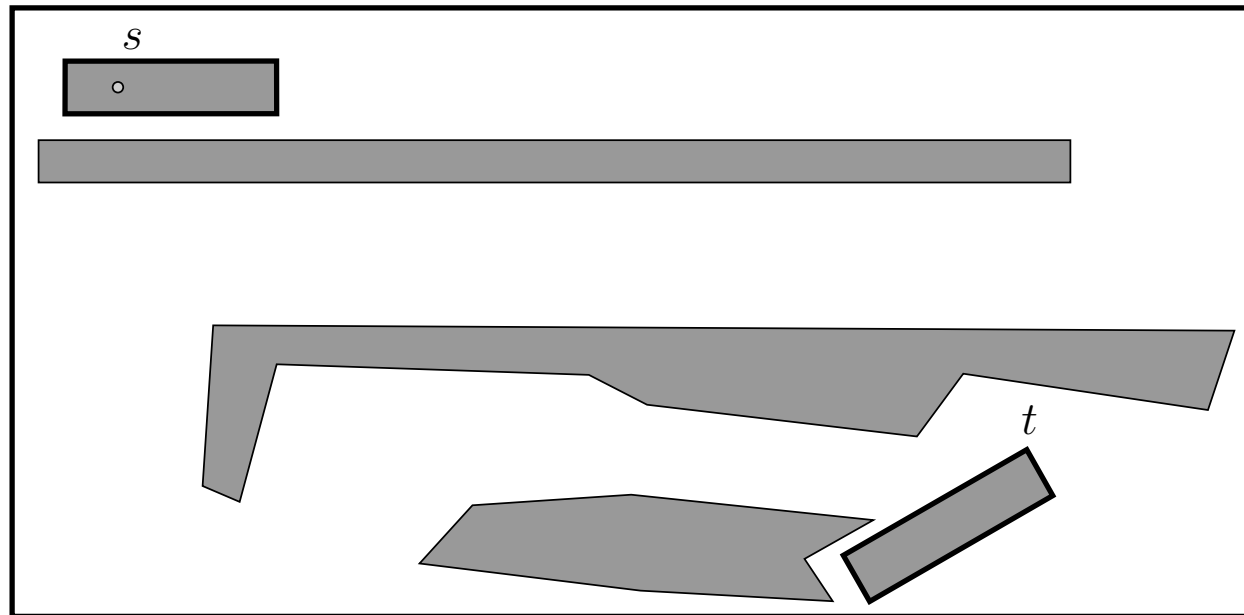
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



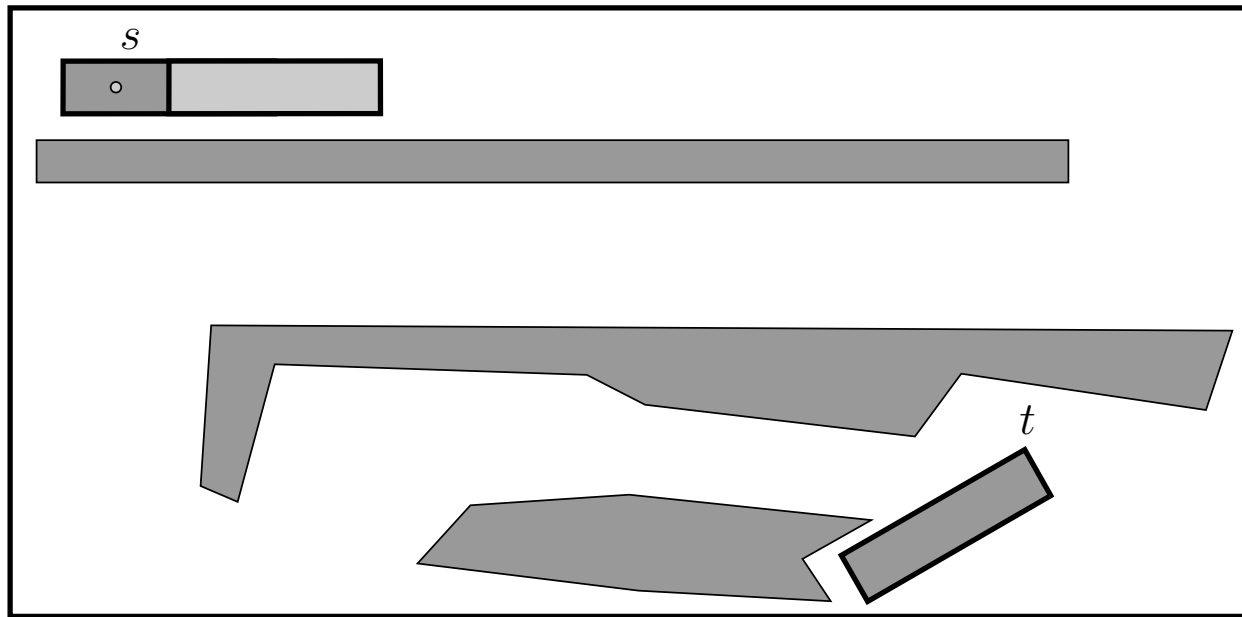
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



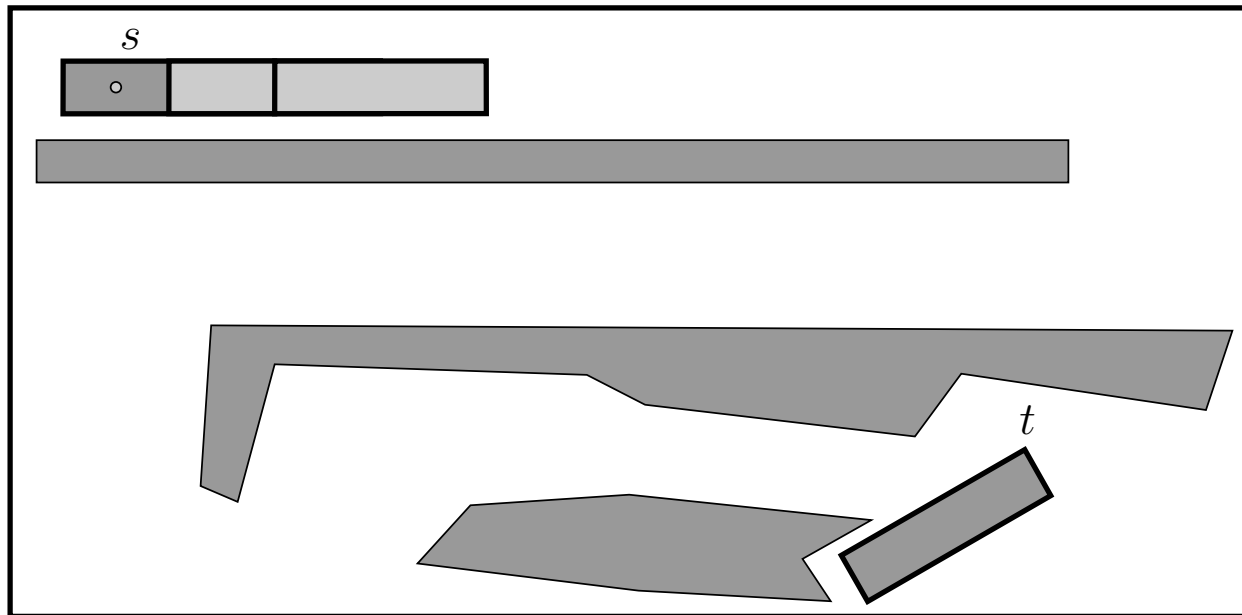
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

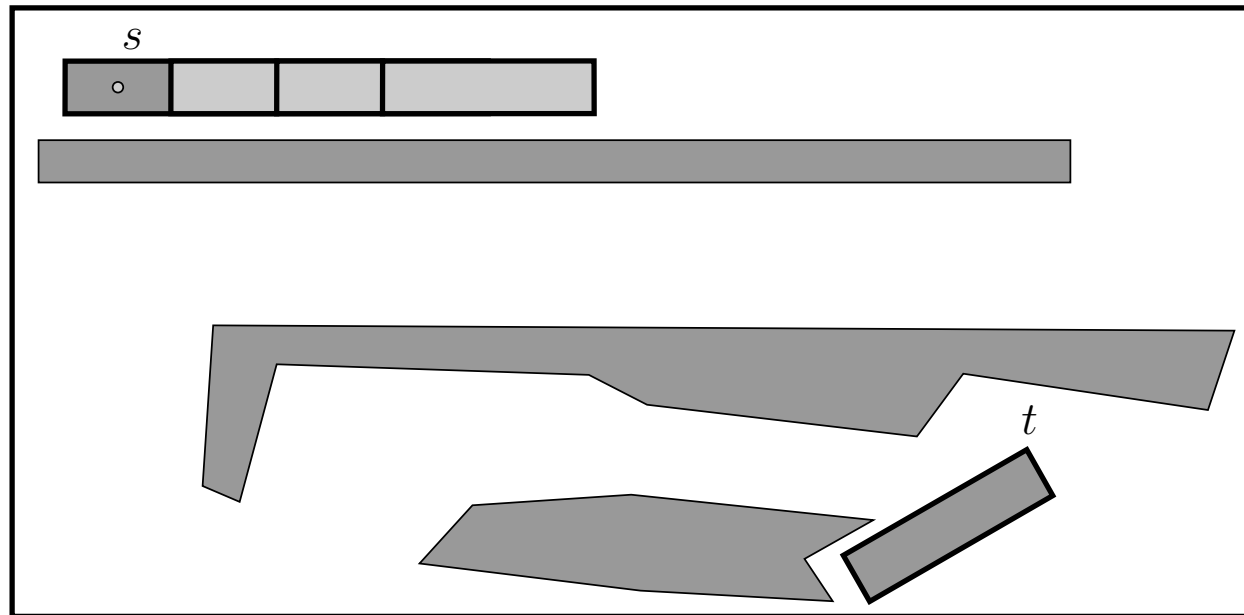
Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation





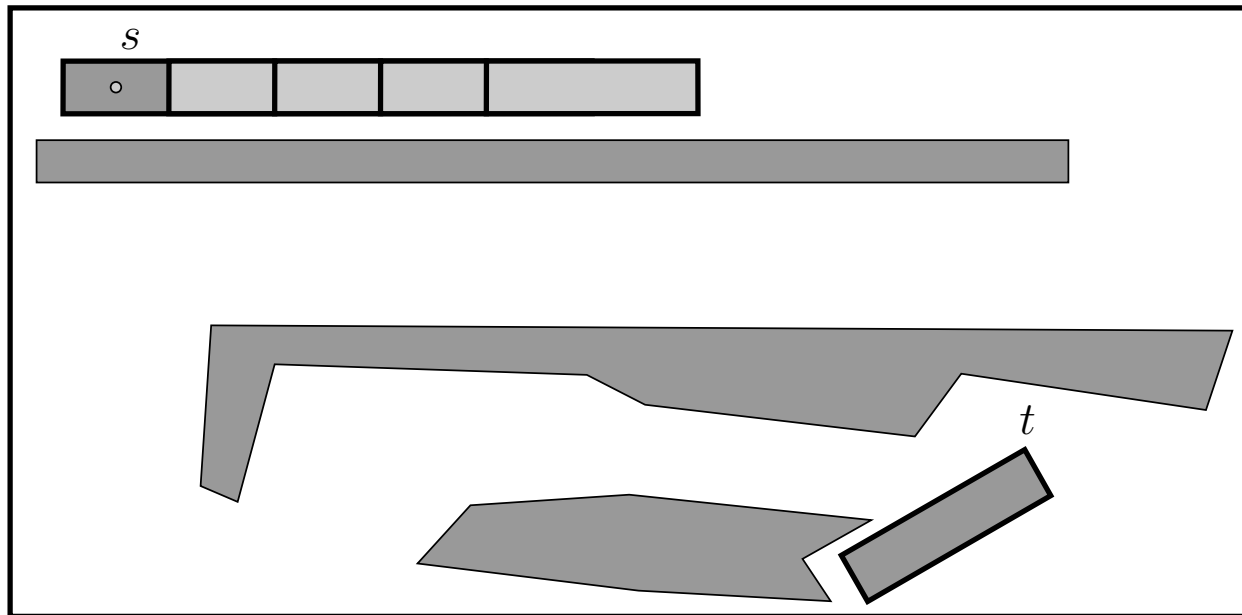
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



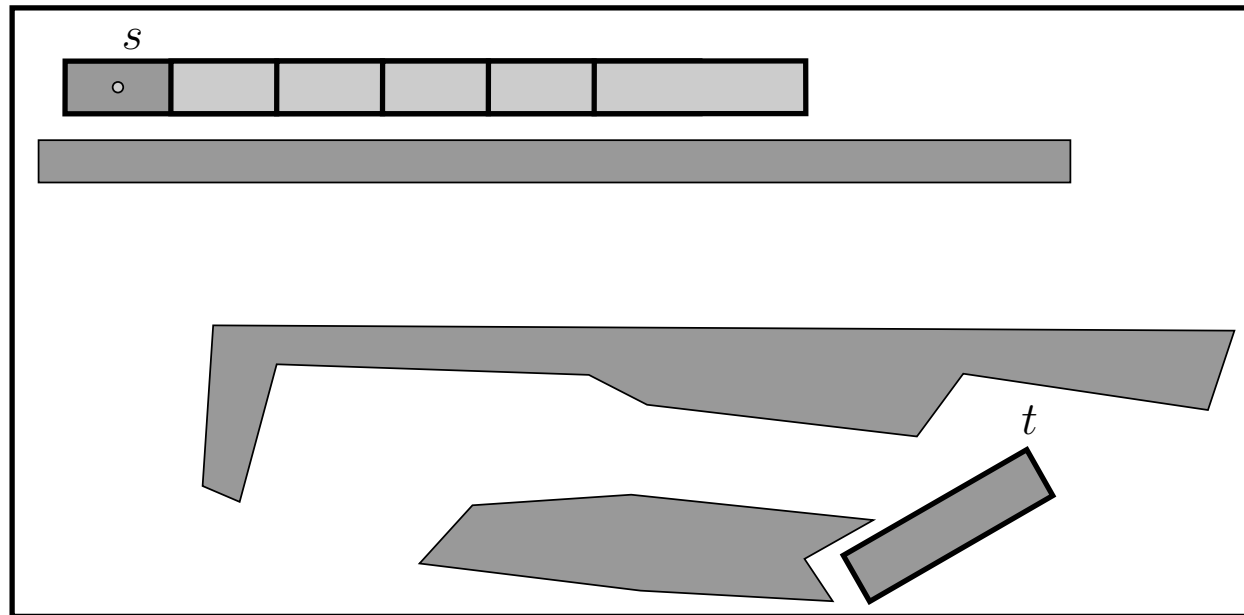
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



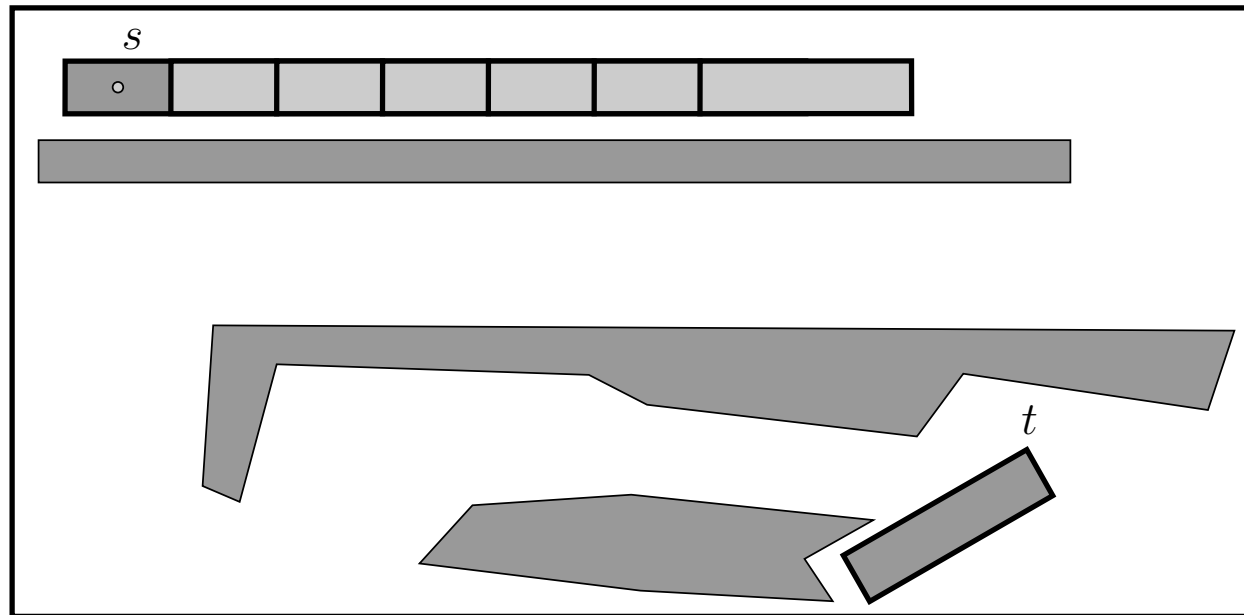
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



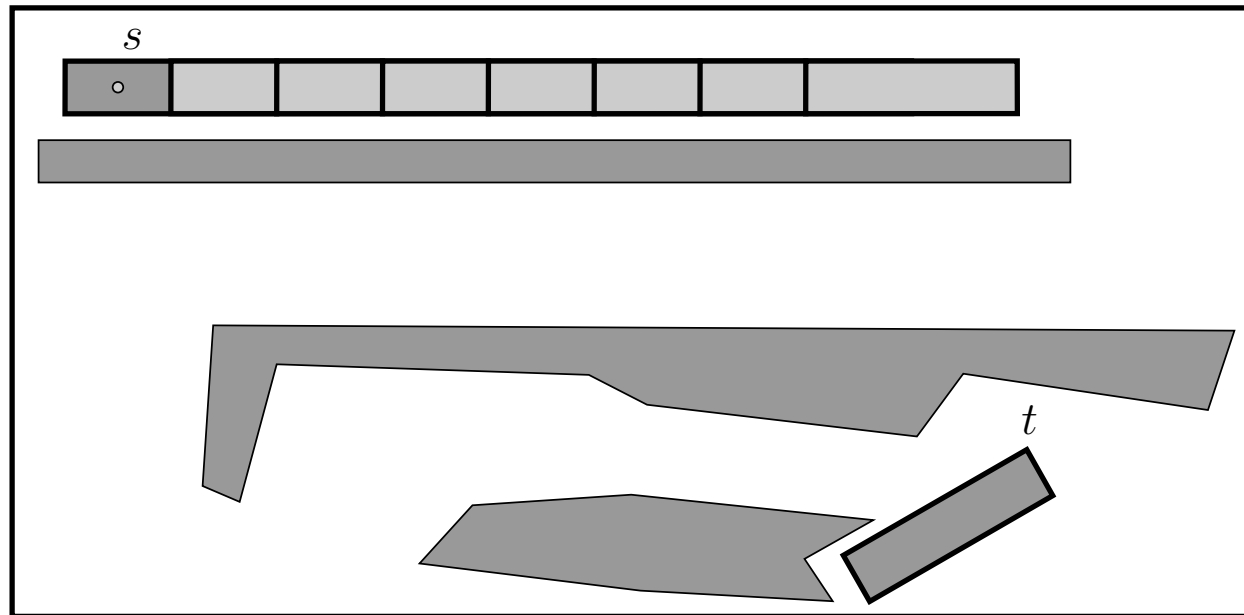
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



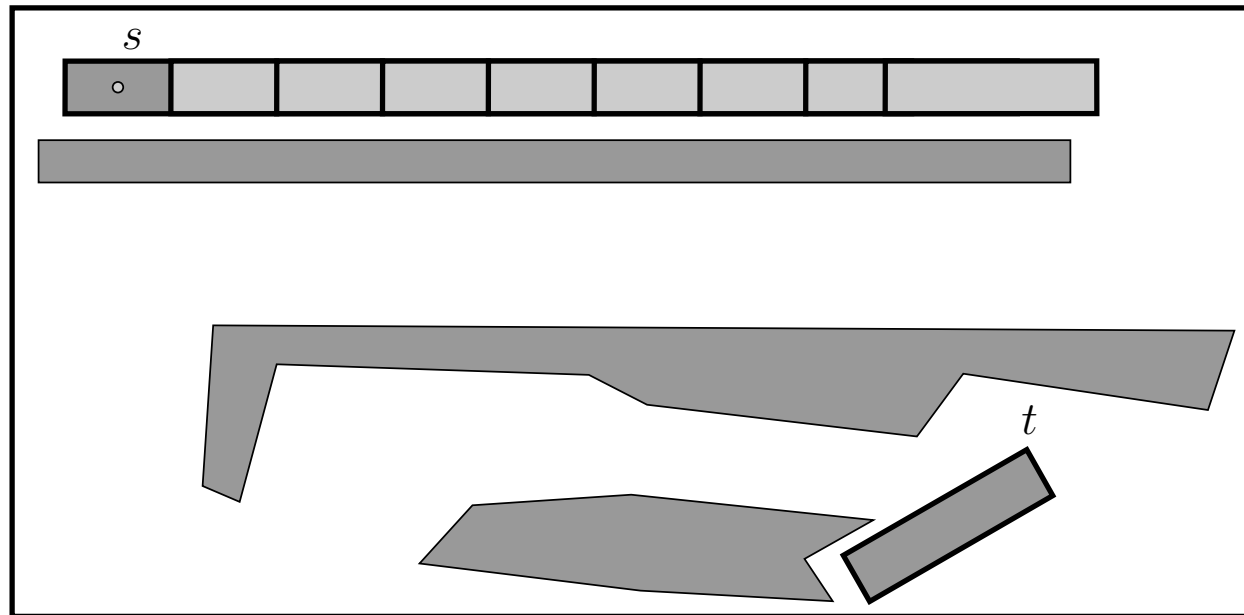
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



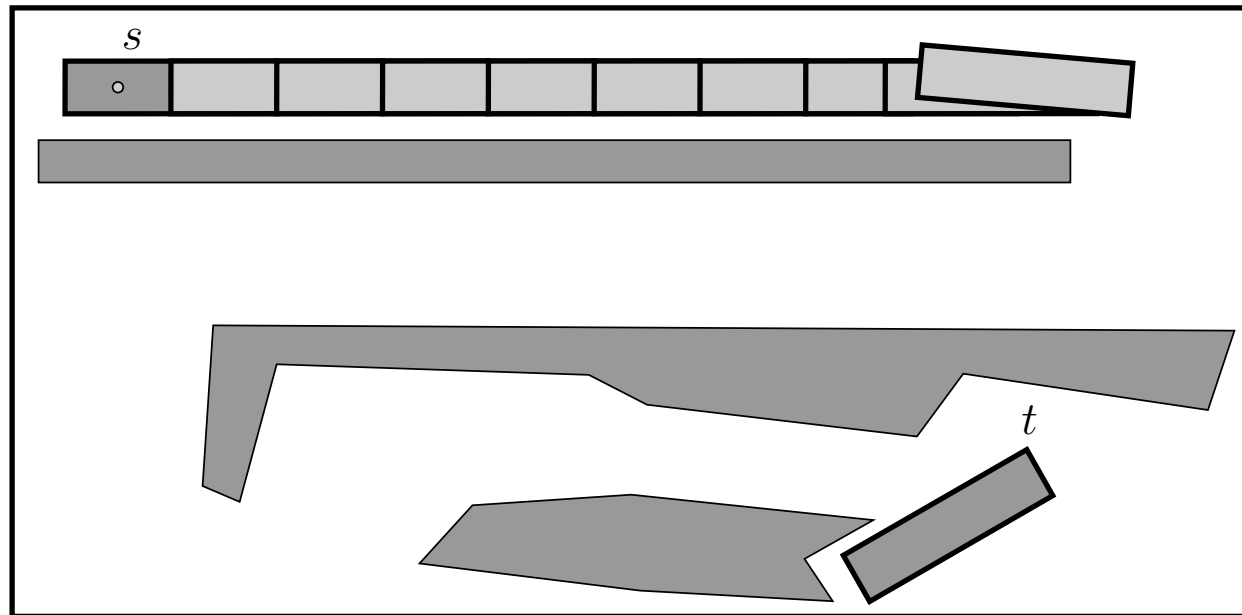
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



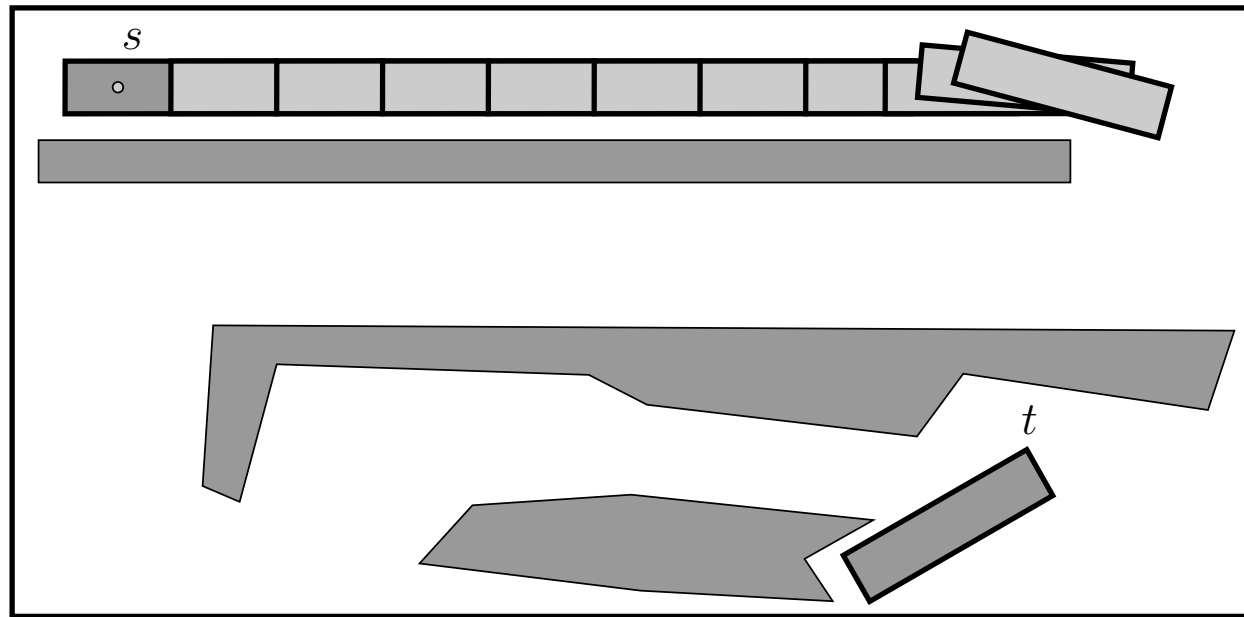
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

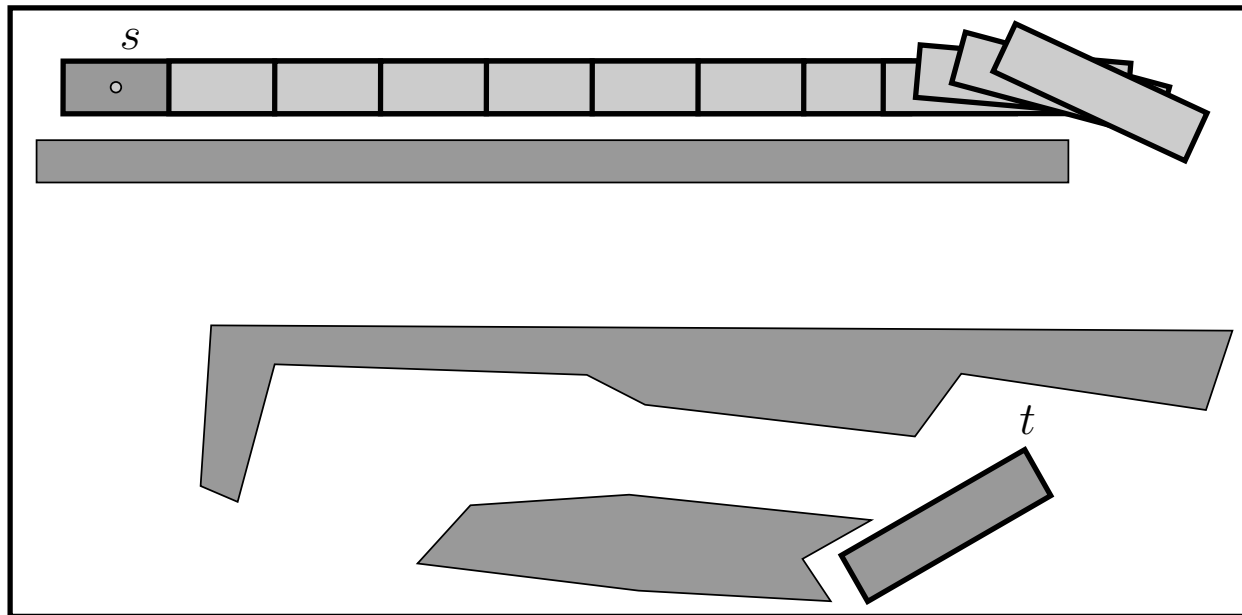
Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation





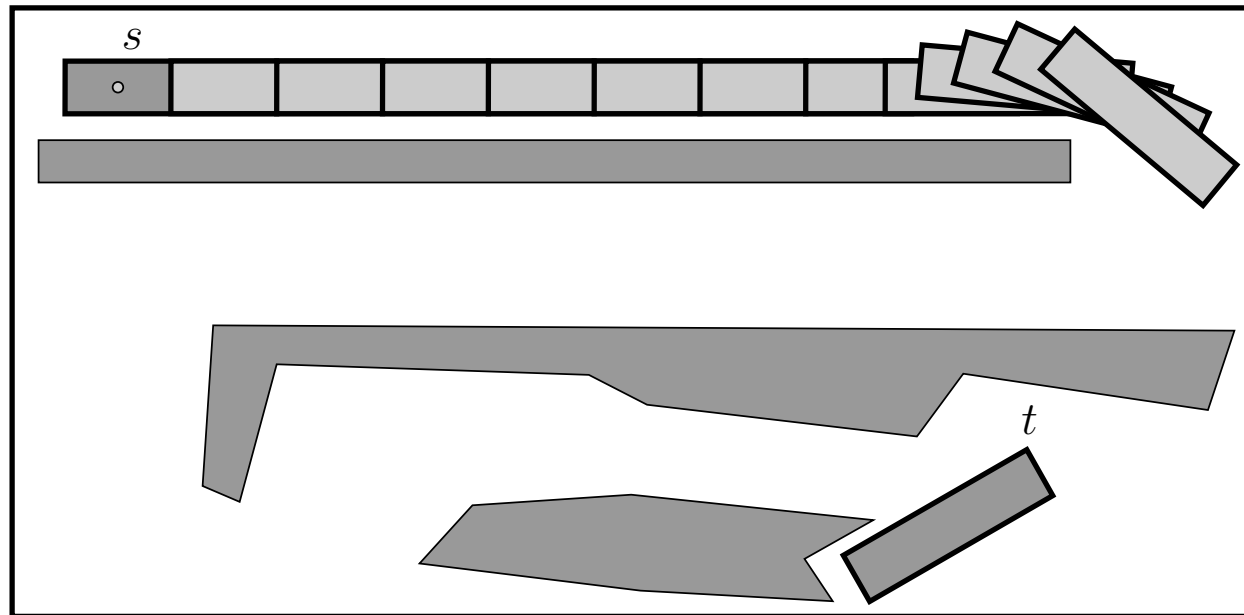
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



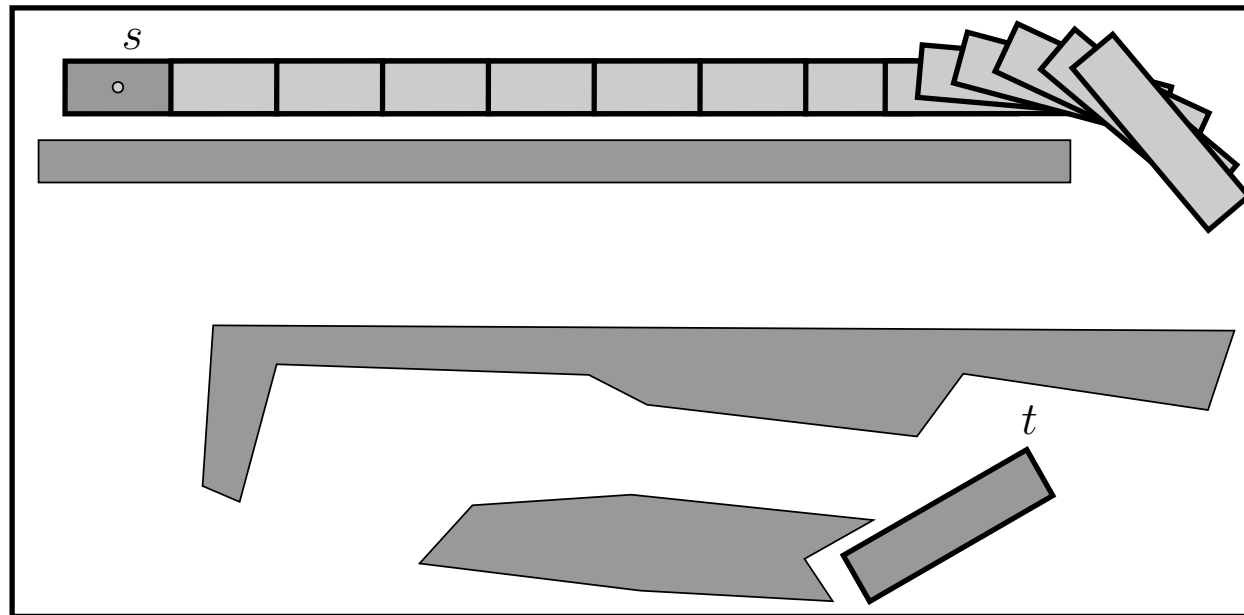
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



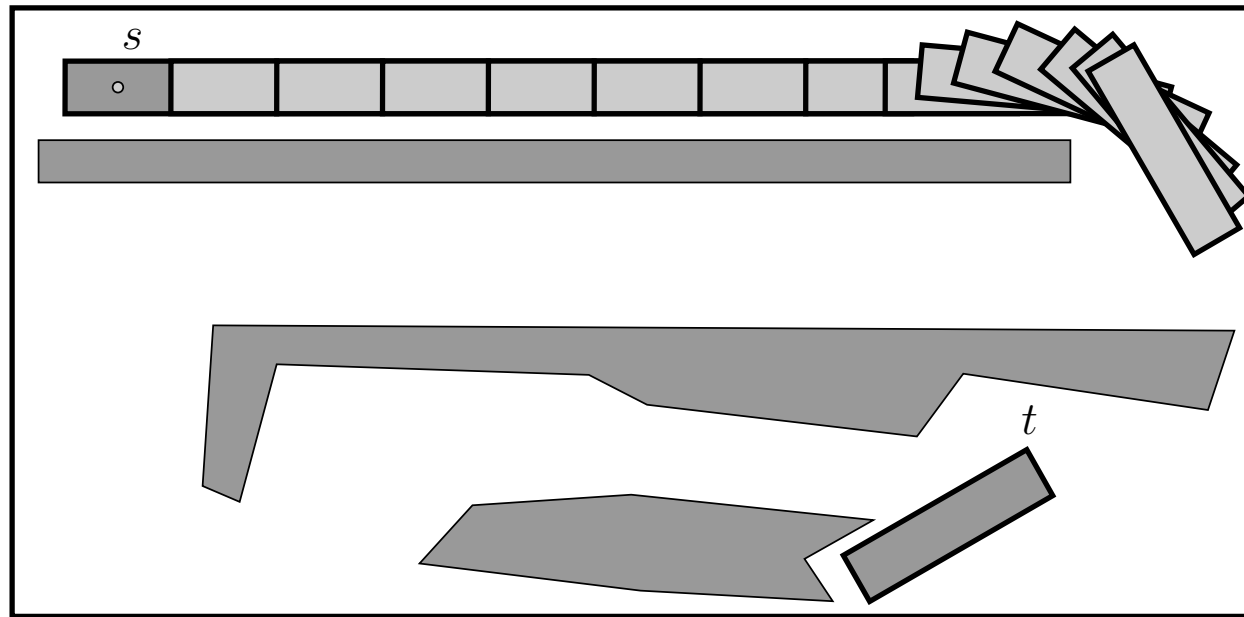
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



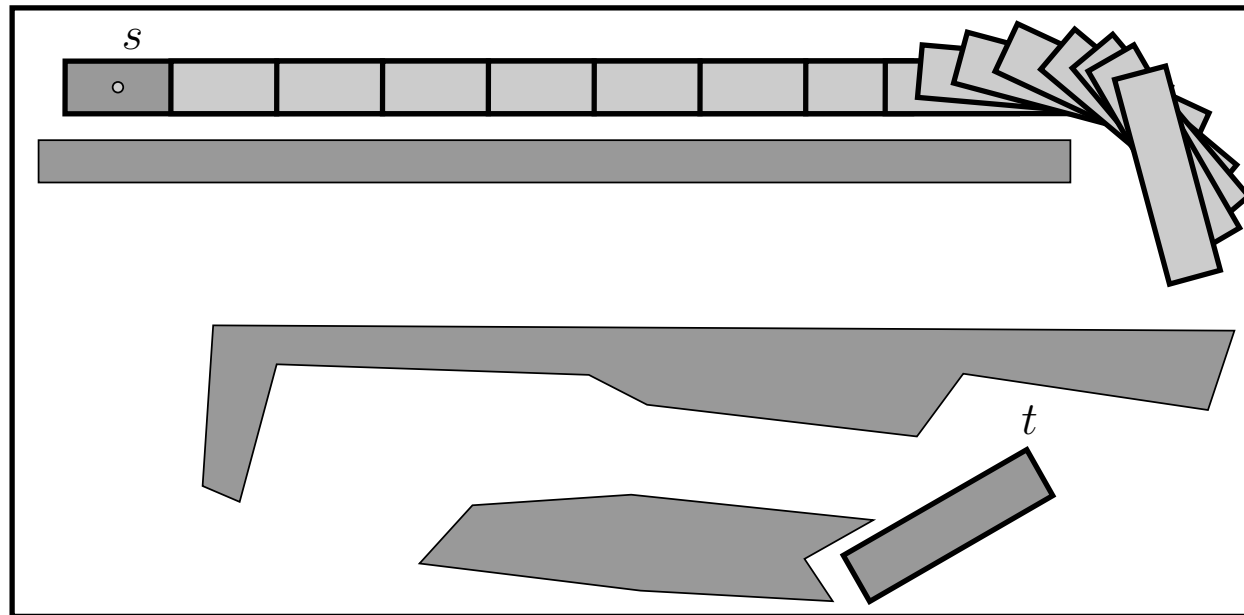
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



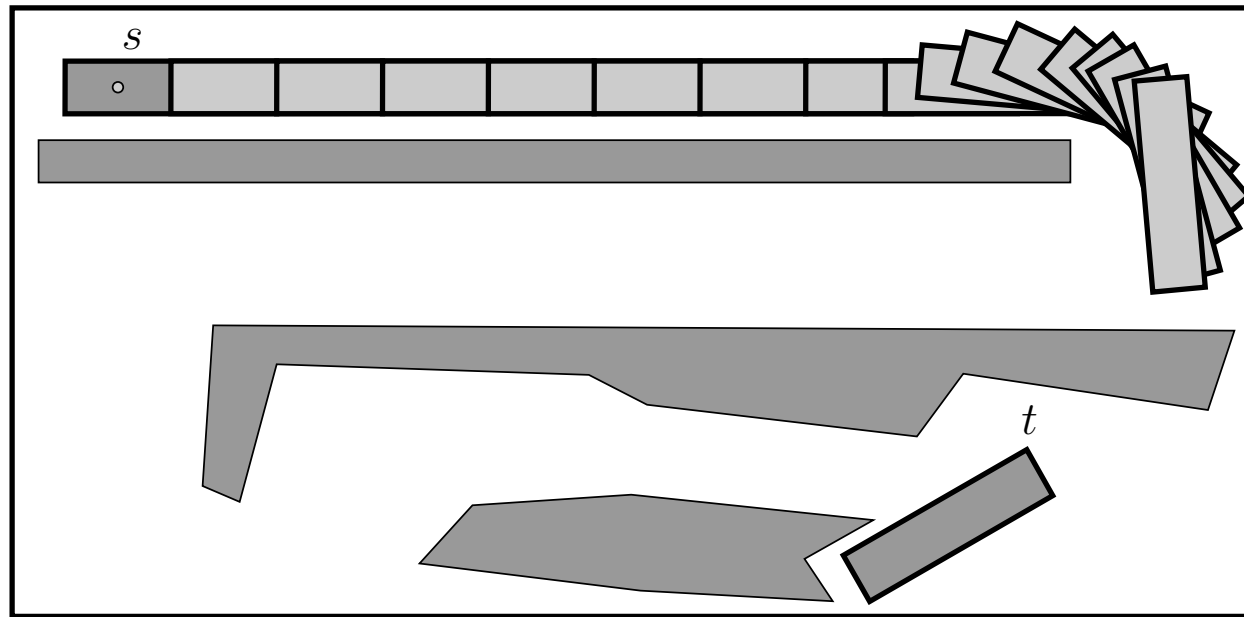
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



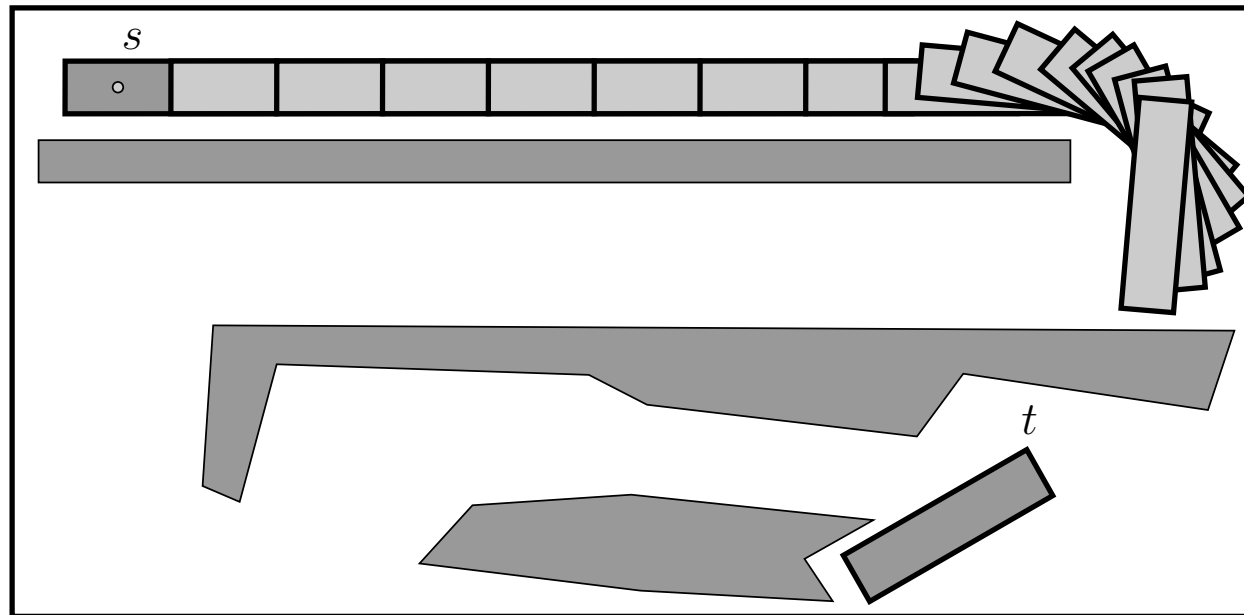
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



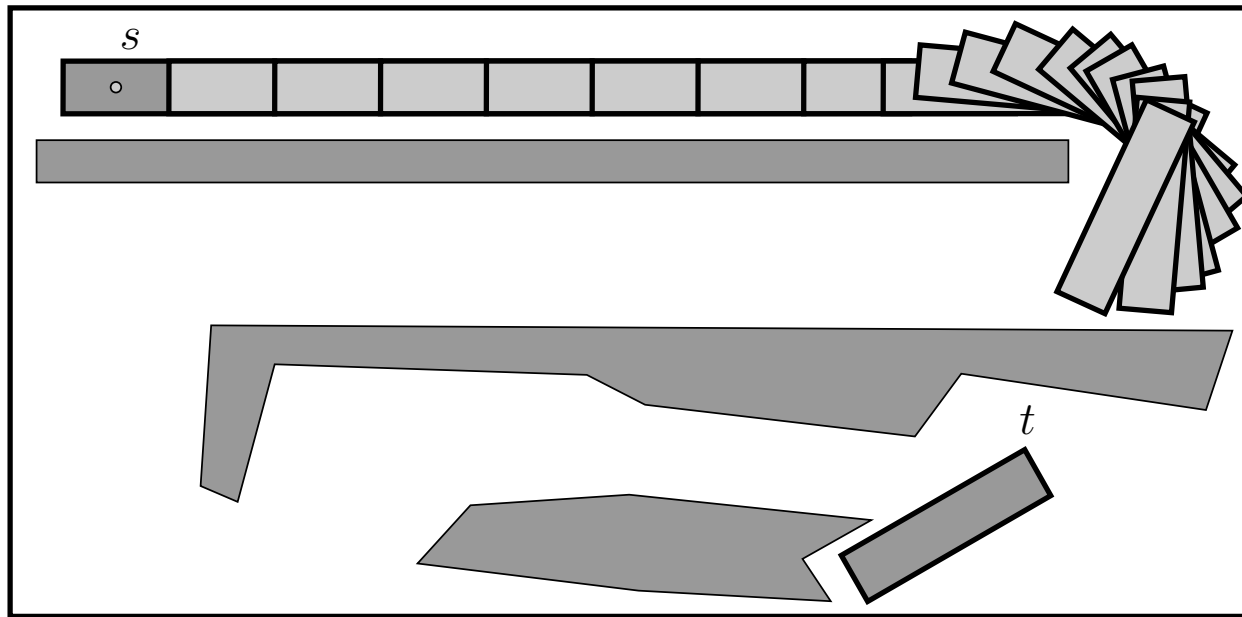
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

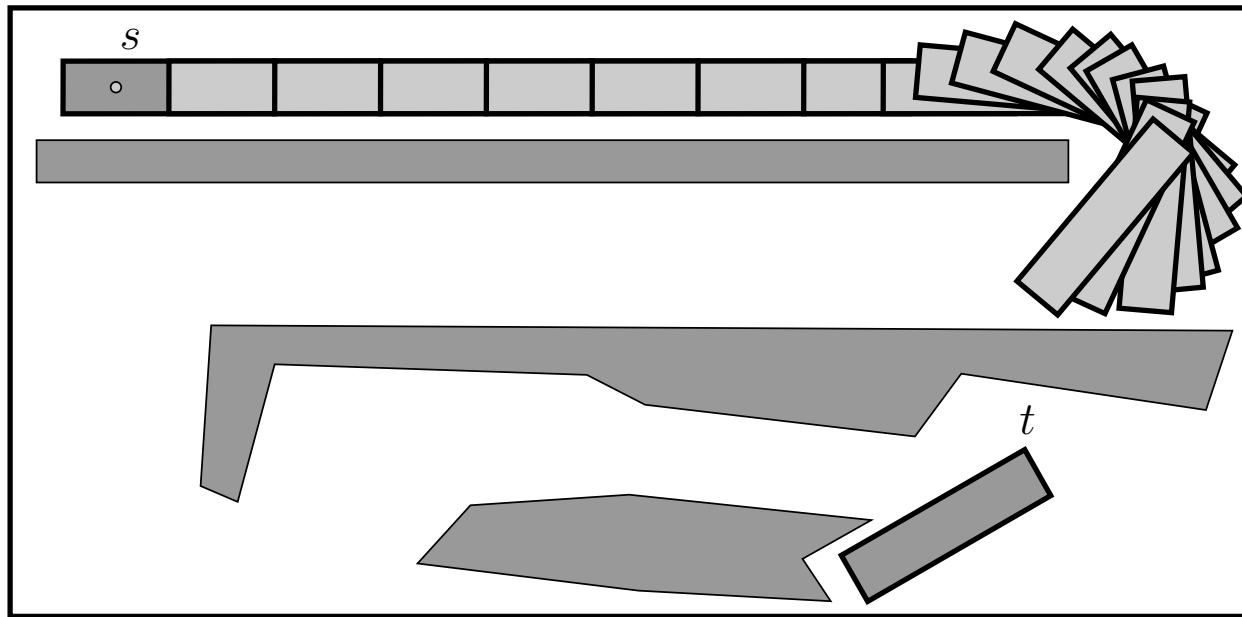
Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation





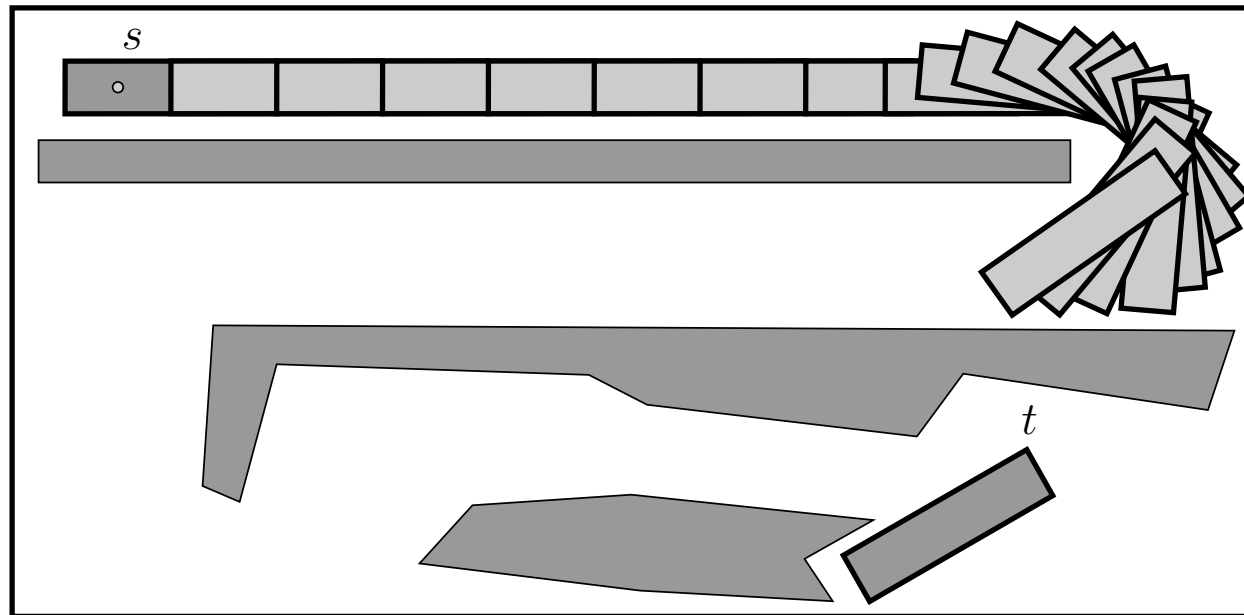
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



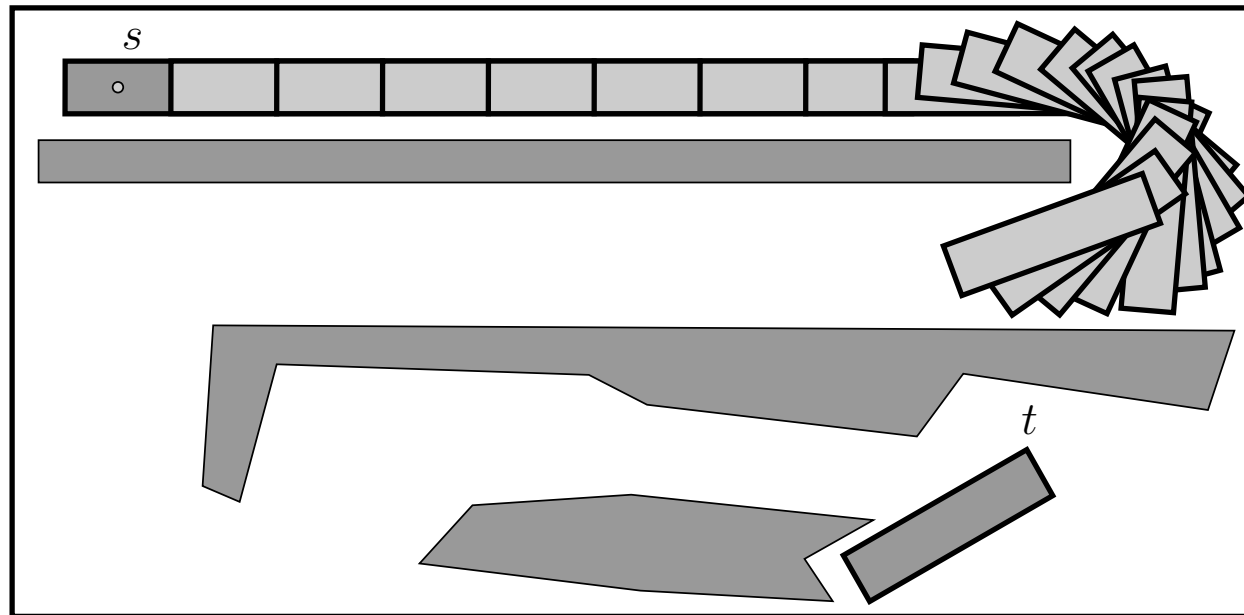
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



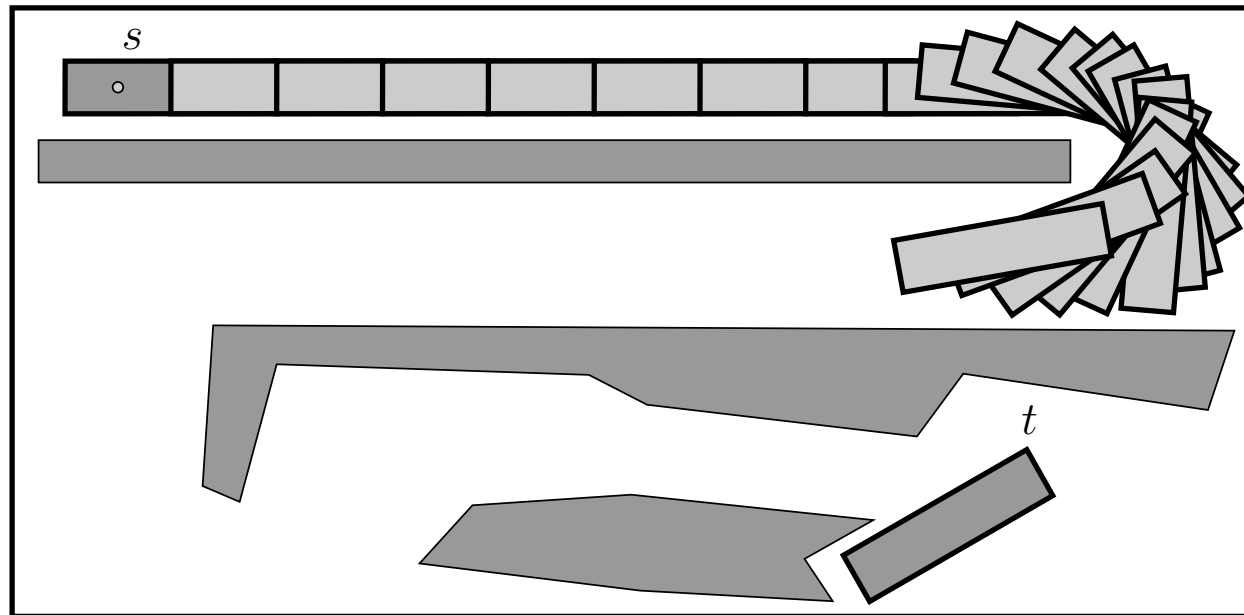
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



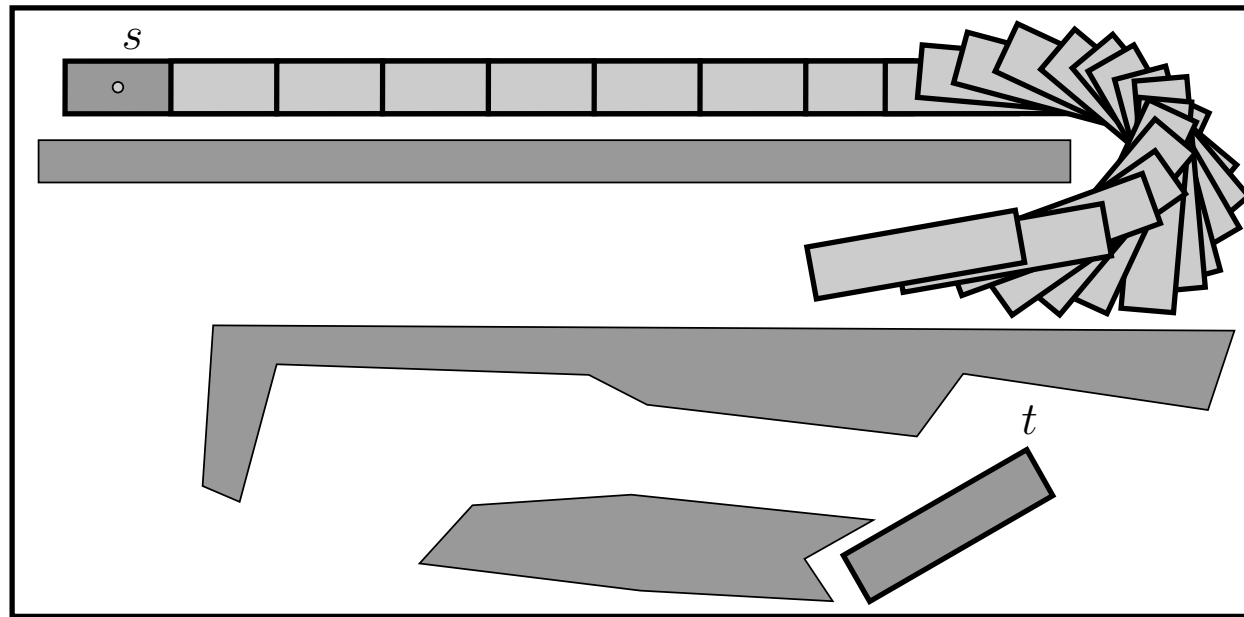
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



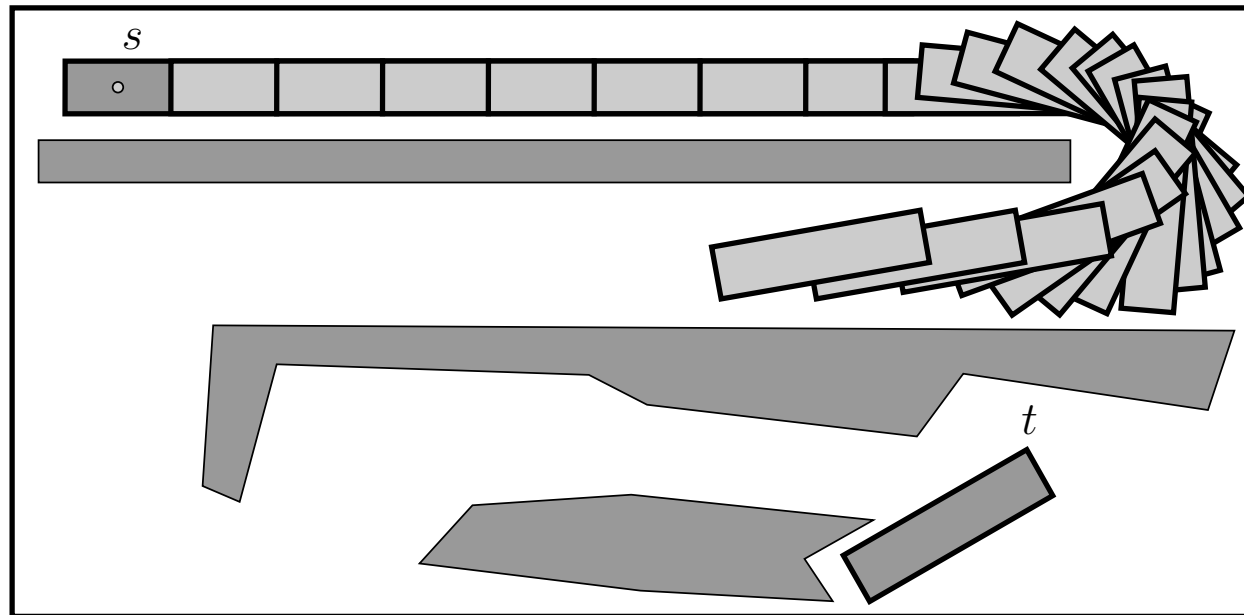
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



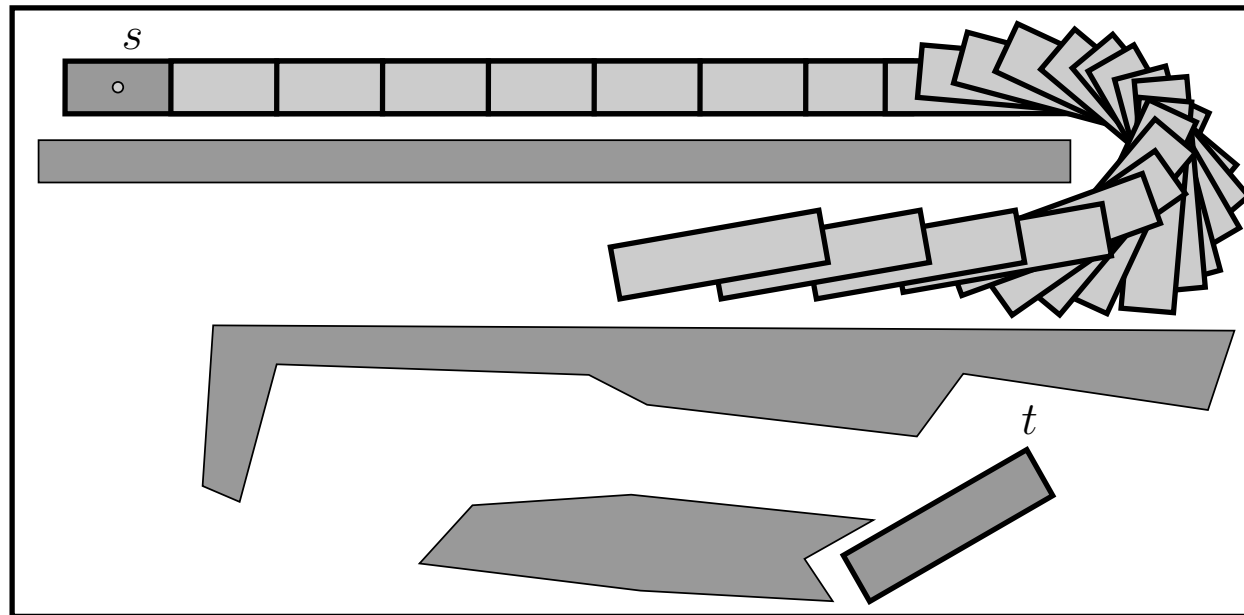
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



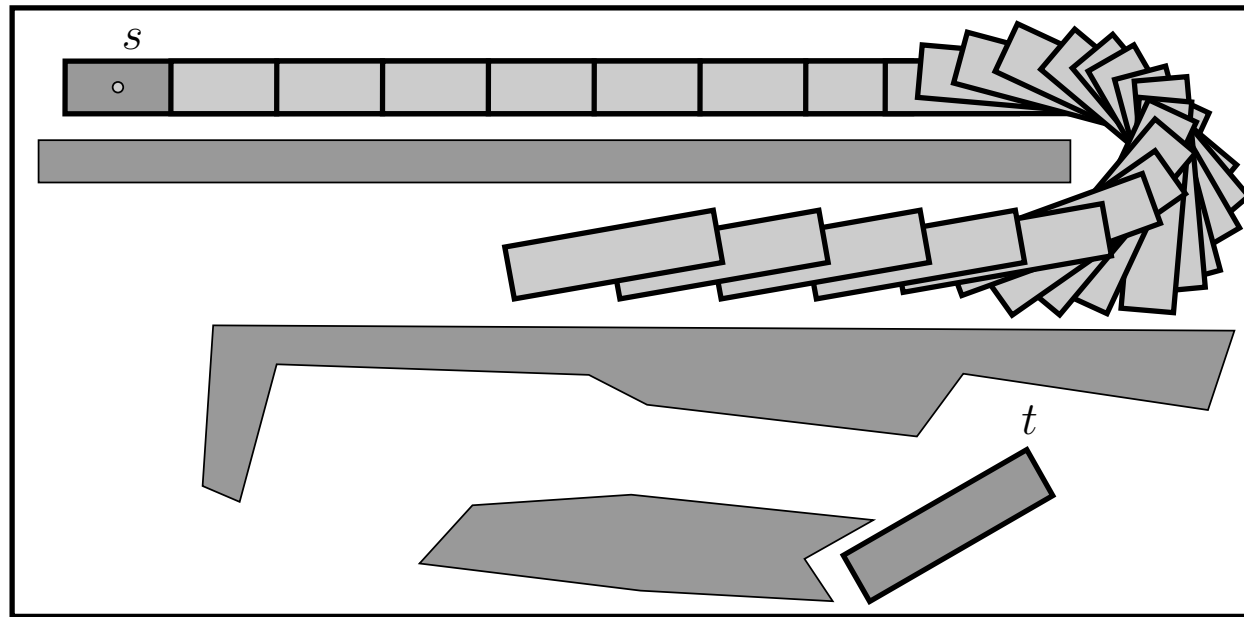
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

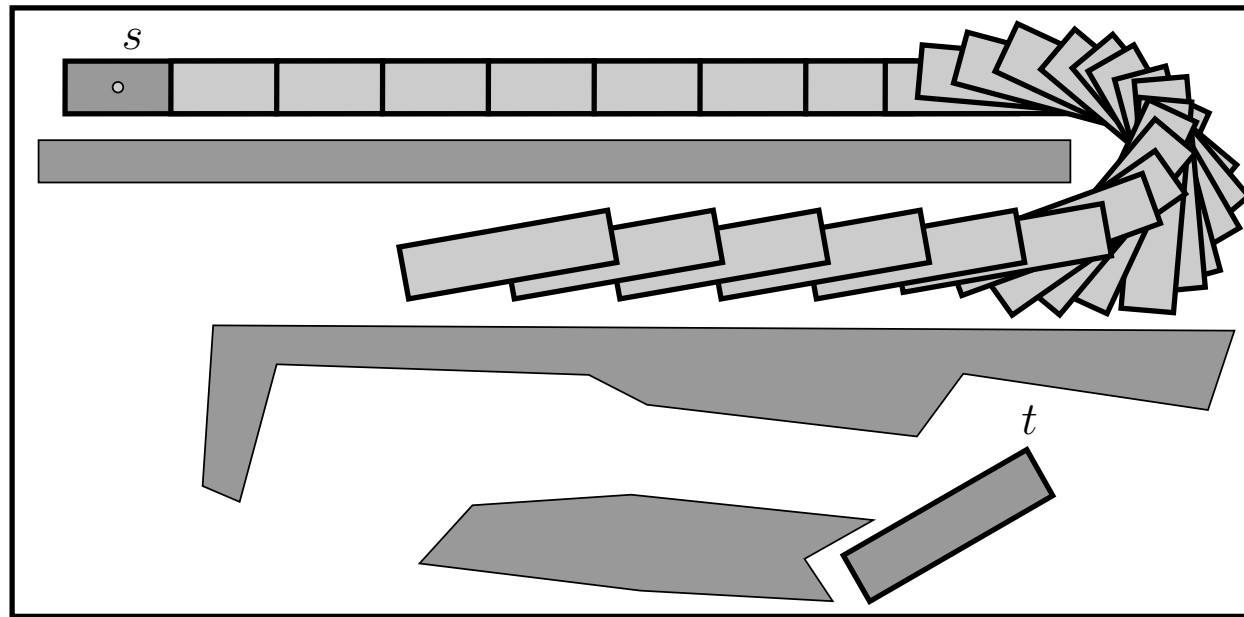
Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation





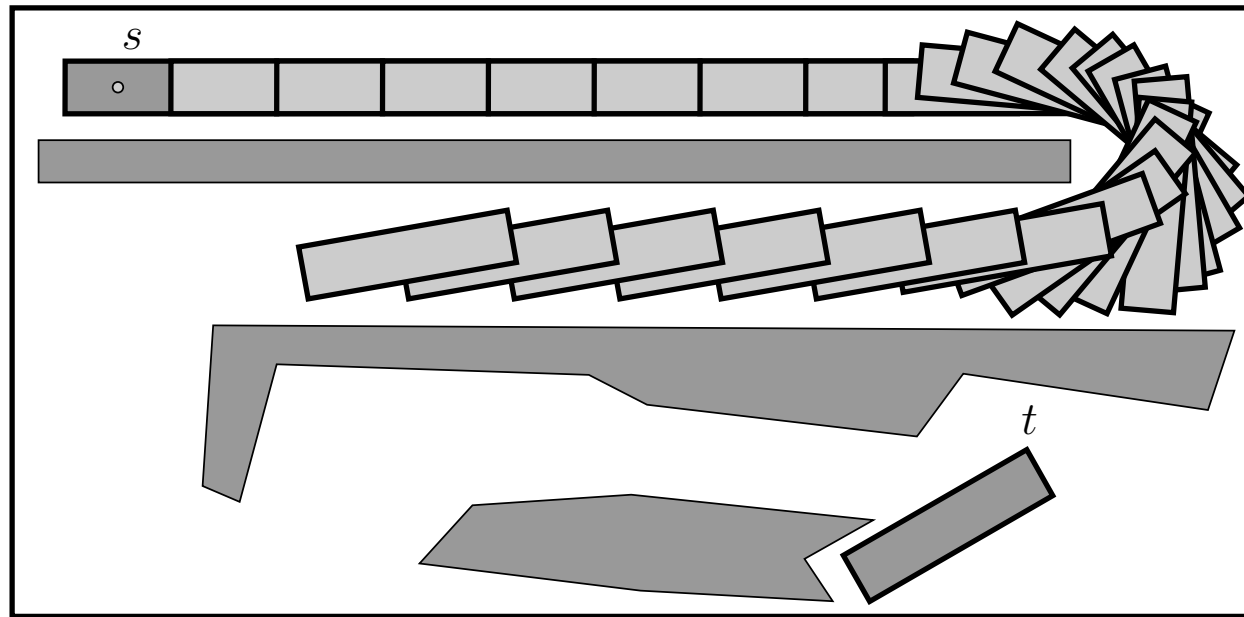
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



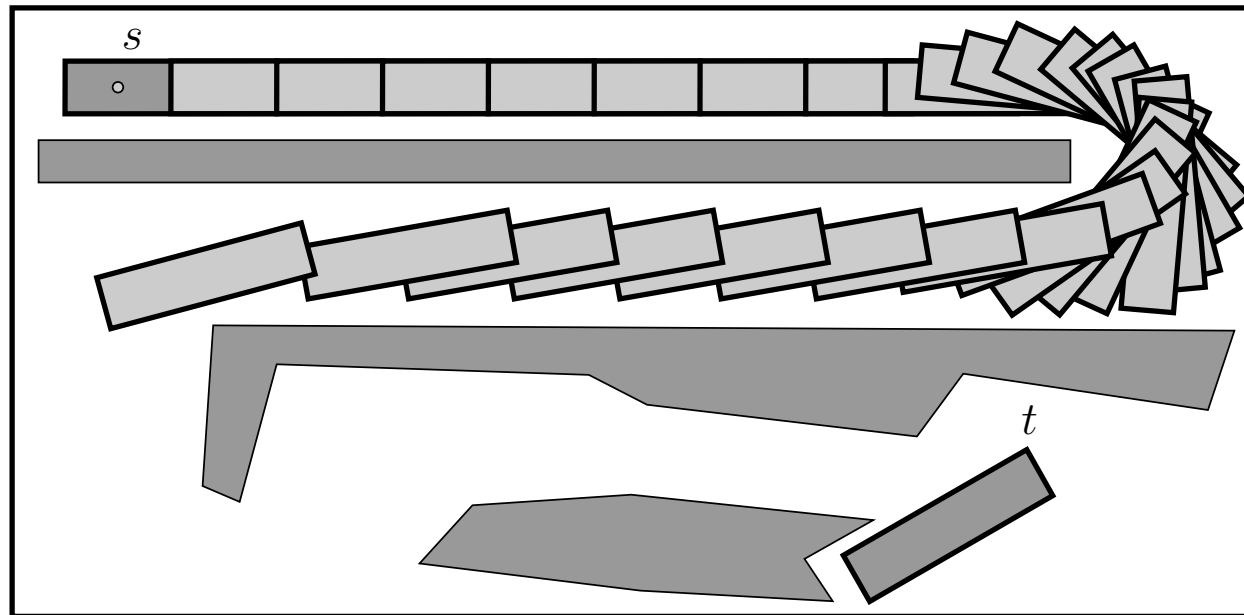
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



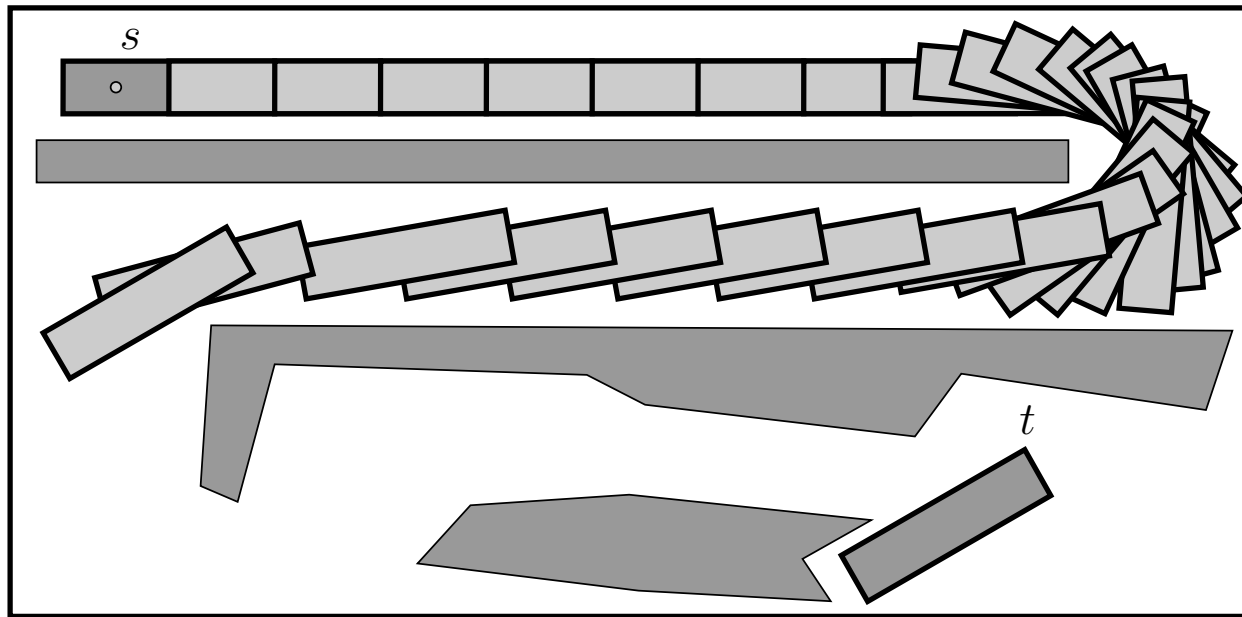
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



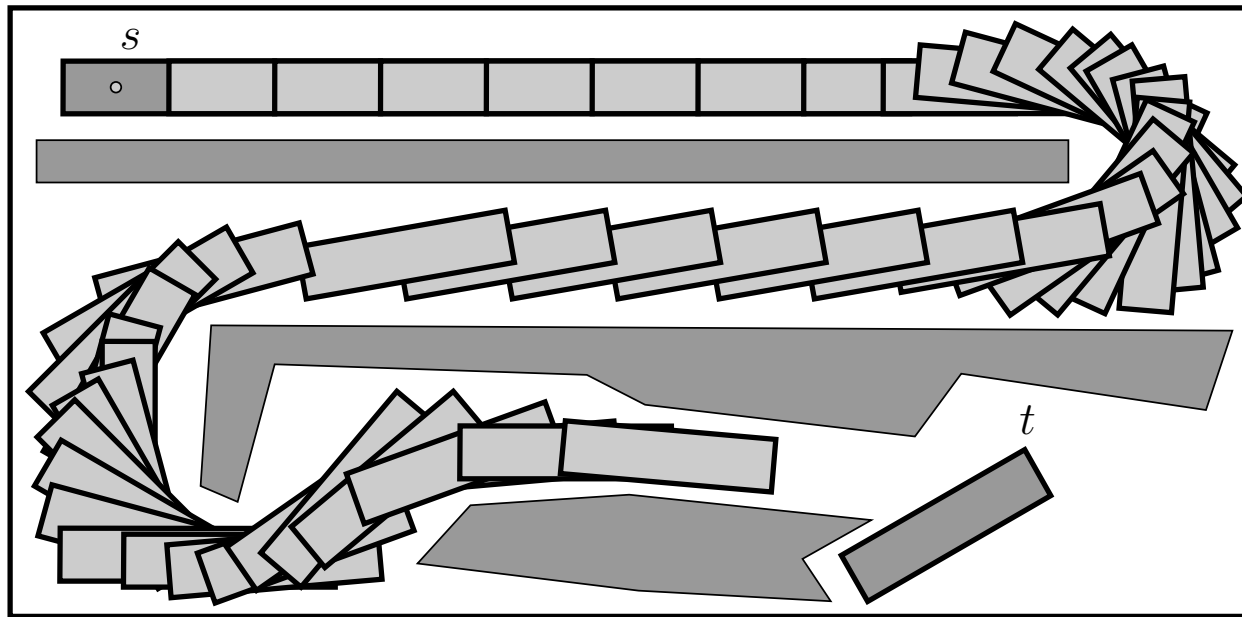
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



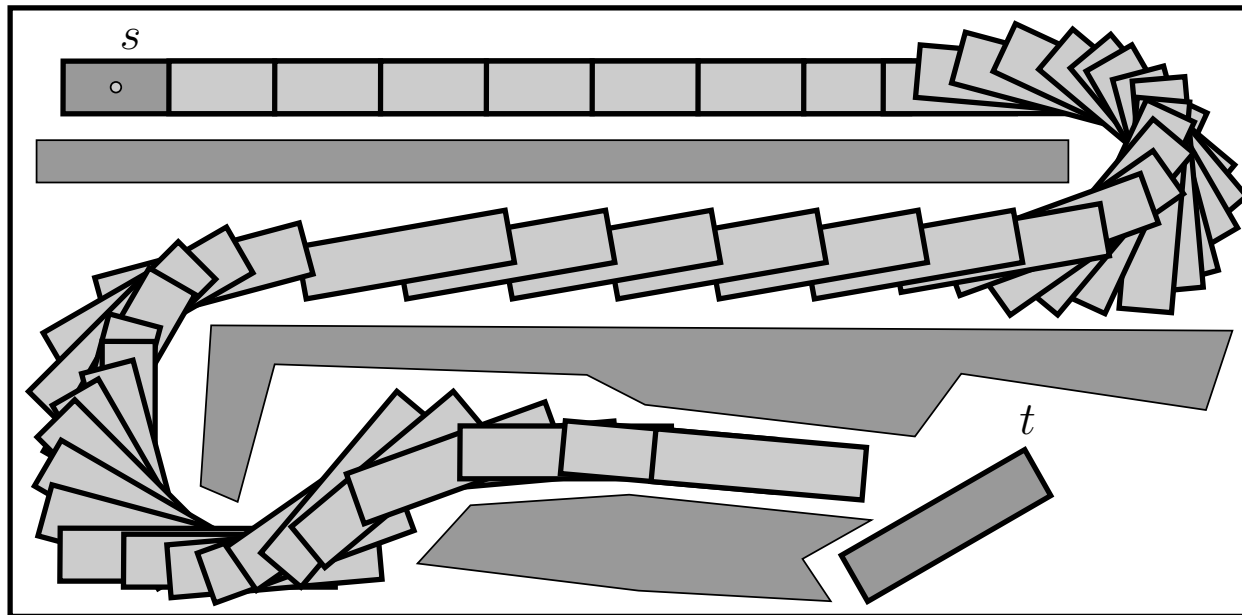
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



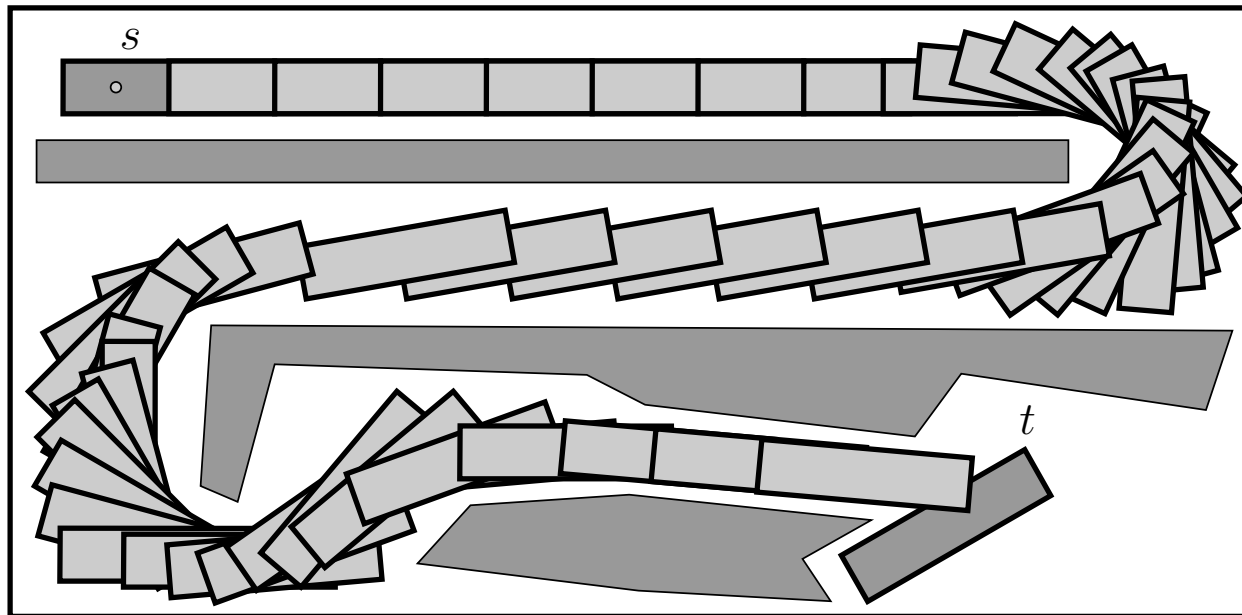
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



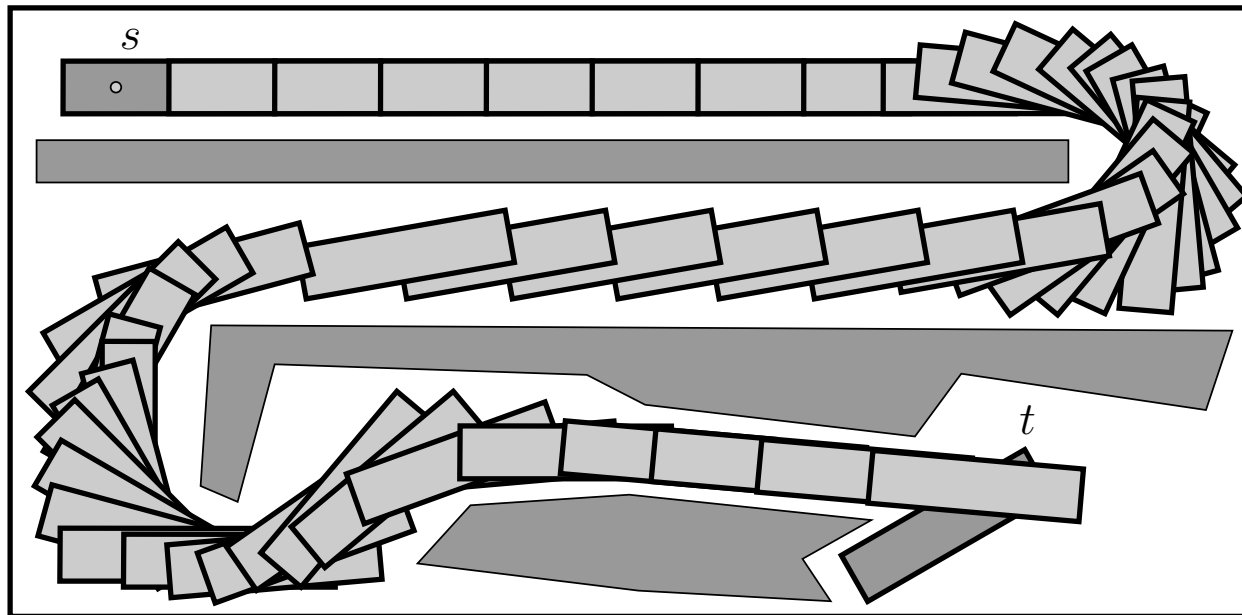
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

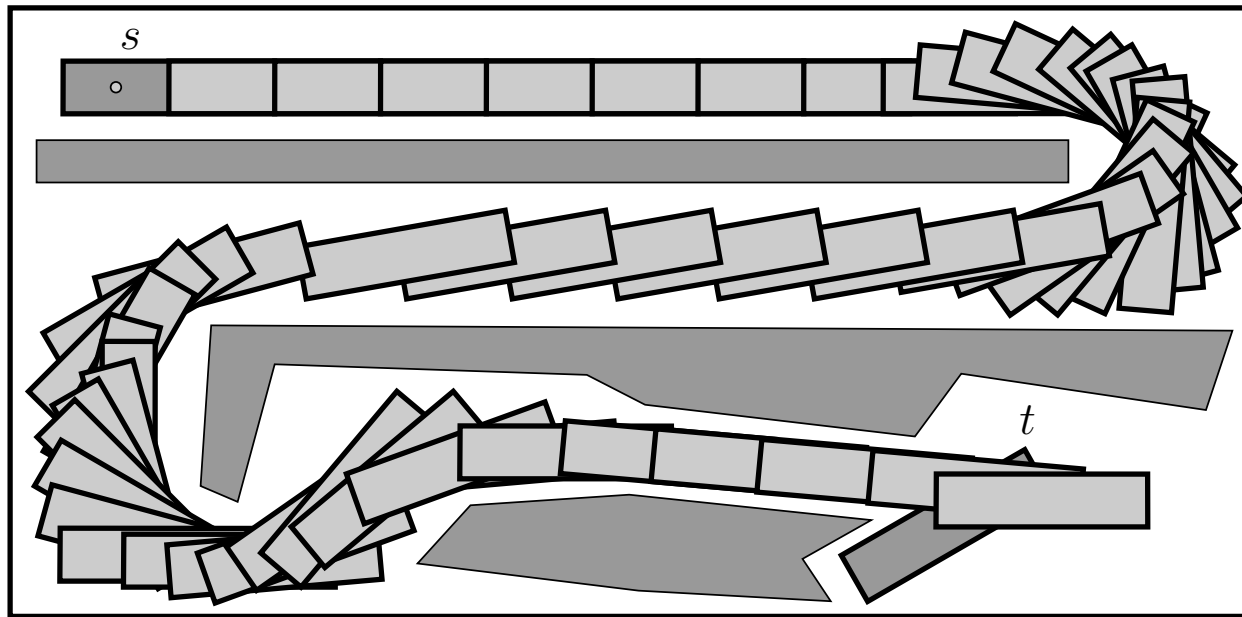
Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation





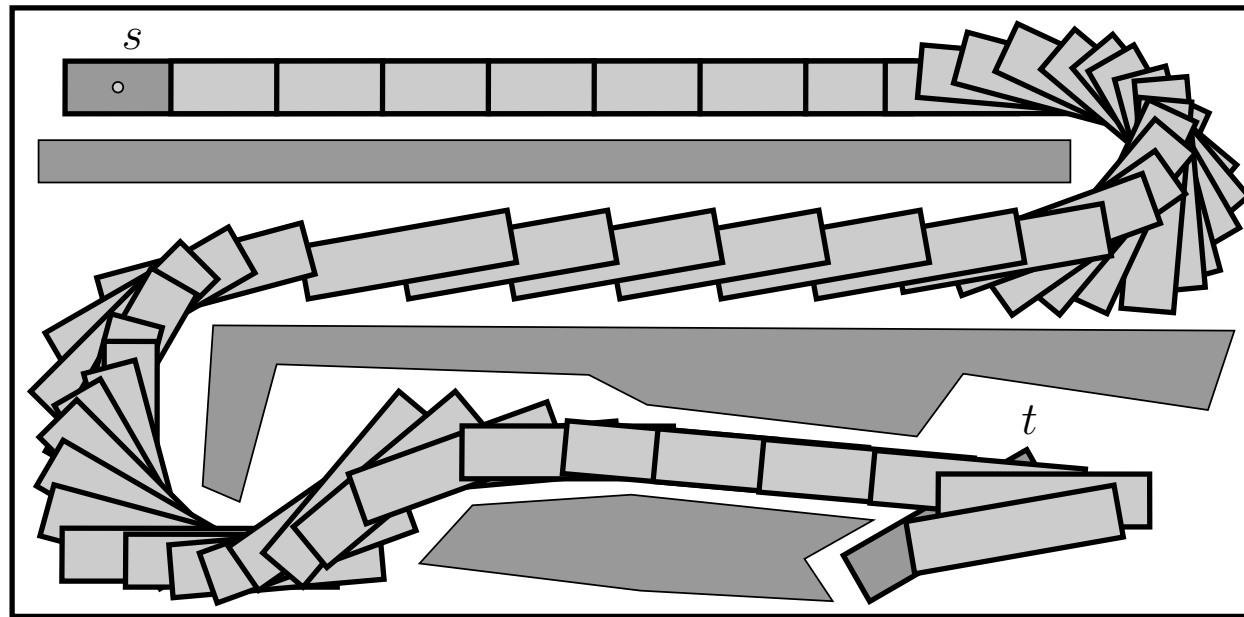
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



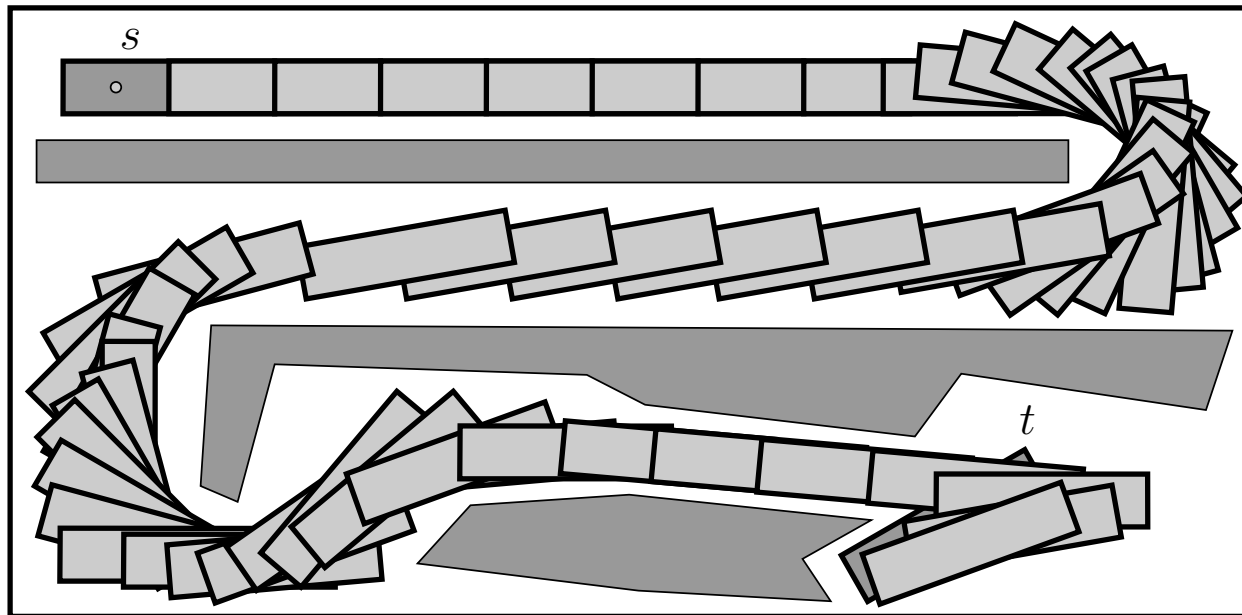
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



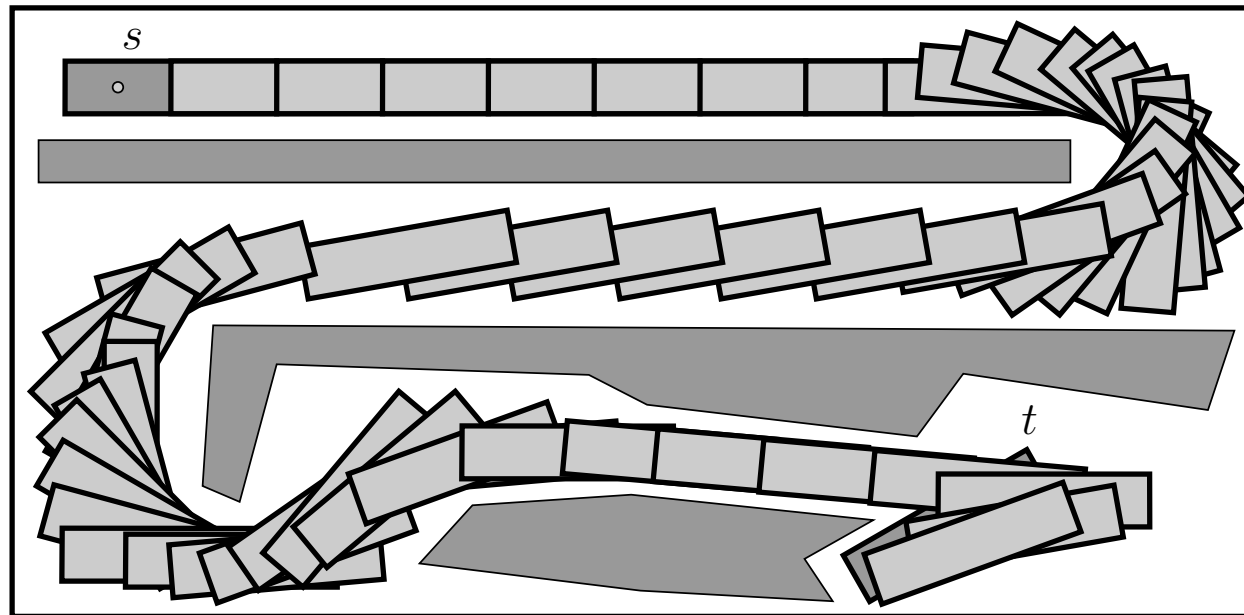
# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



# Kapitel 2.3 Beispiel!

Bewegung von  $A$  nach  $B$  mit Rotation und Translation



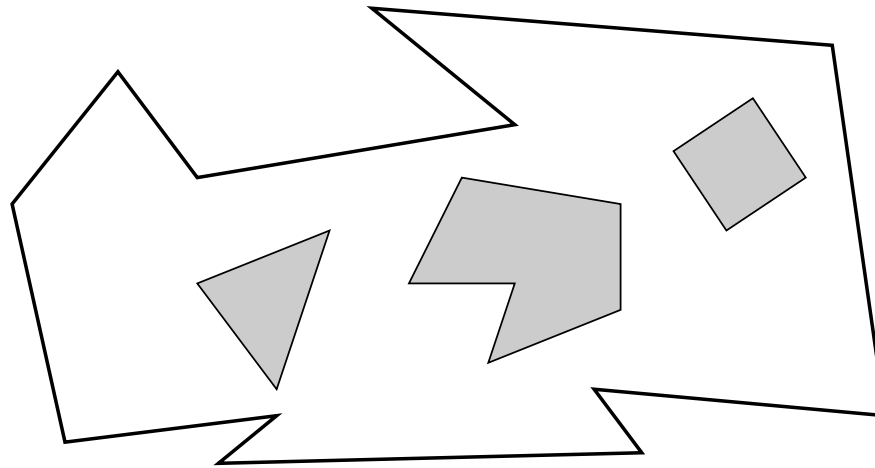
# Untere Schranke! **Th. 2.25**

# Untere Schranke! **Th. 2.25**

- Liniensegment bewegen

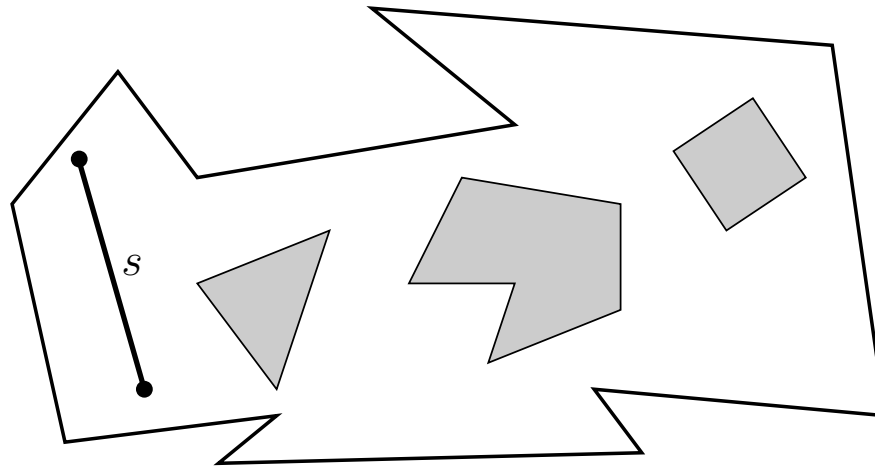
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten



# Untere Schranke! Th. 2.25

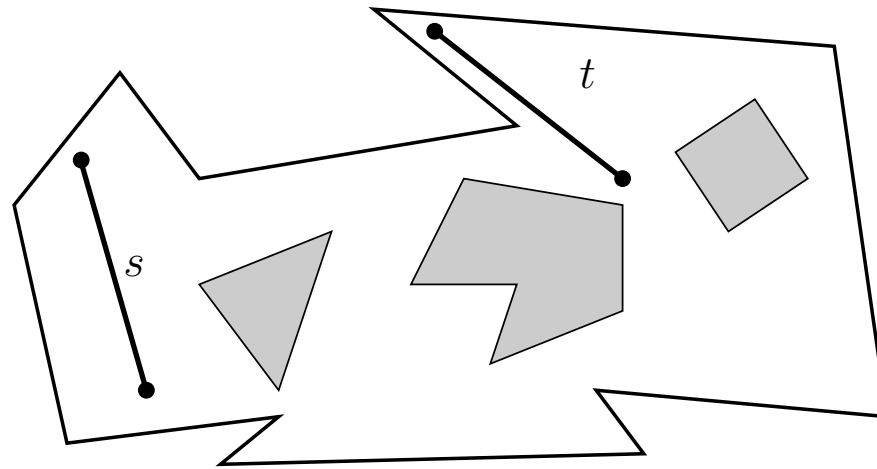
- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten





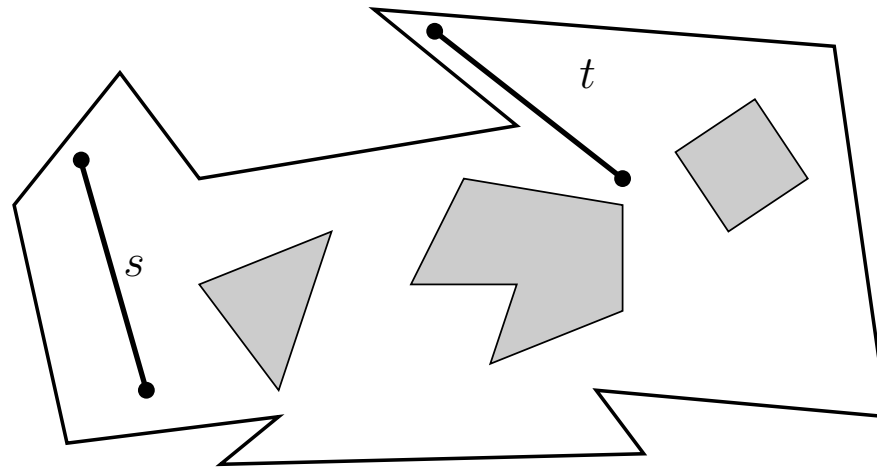
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten



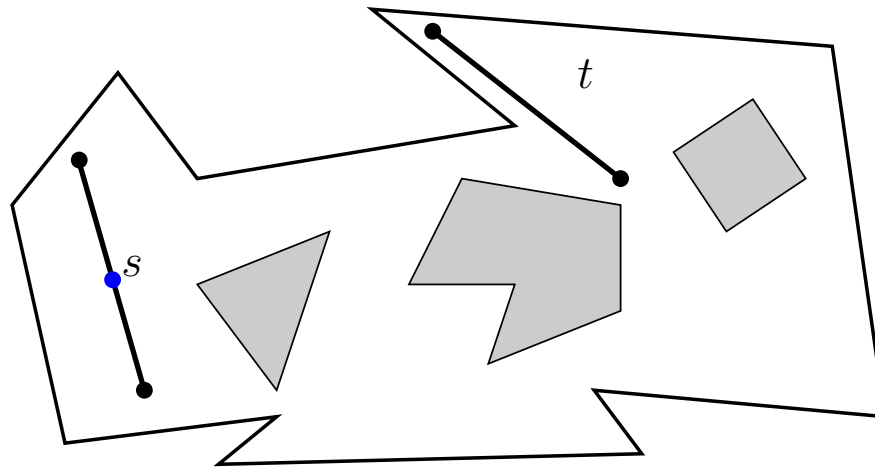
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten
- Mindestens  $\Omega(n^2)$  Bewegungsschritte



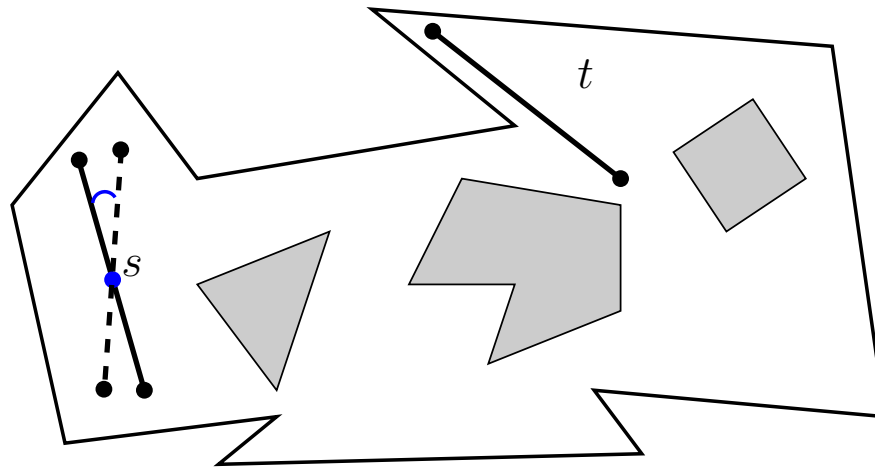
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten
- Mindestens  $\Omega(n^2)$  Bewegungsschritte
- Translation, Rotation im Wechsel



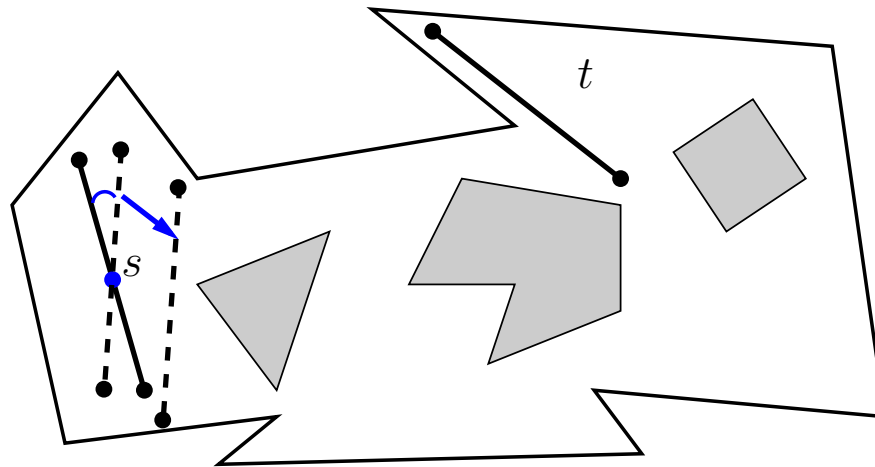
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten
- Mindestens  $\Omega(n^2)$  Bewegungsschritte
- Translation, Rotation im Wechsel
- Konstruktiv!



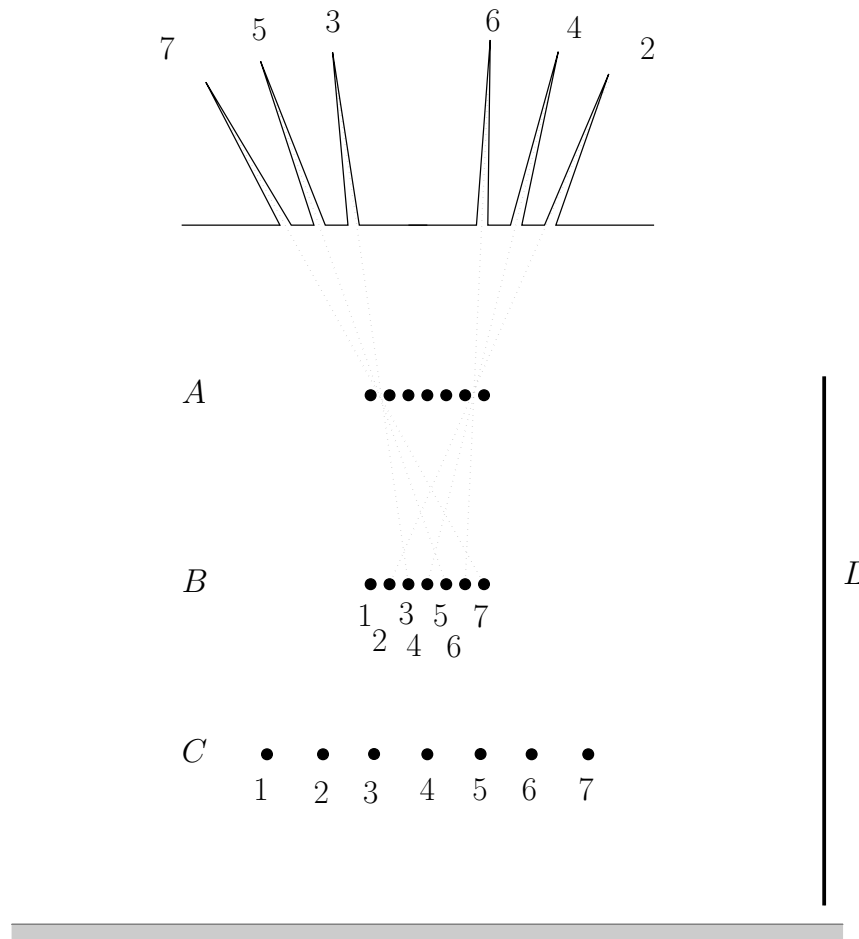
# Untere Schranke! Th. 2.25

- Liniensegment bewegen
- Von  $s$  nach  $t$  in Szene mit  $n$  Kanten
- Mindestens  $\Omega(n^2)$  Bewegungsschritte
- Translation, Rotation im Wechsel
- Konstruktiv!



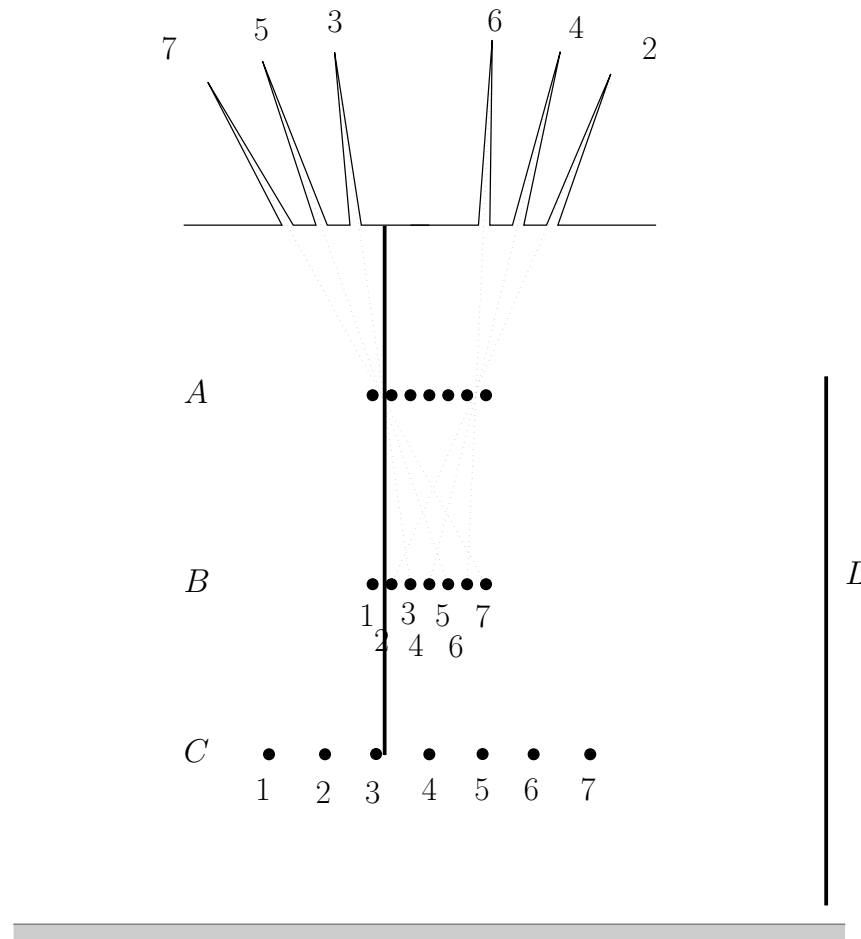
# Untere Schranke! **Th. 2.24**

# Untere Schranke! Th. 2.24



# Untere Schranke! Th. 2.24

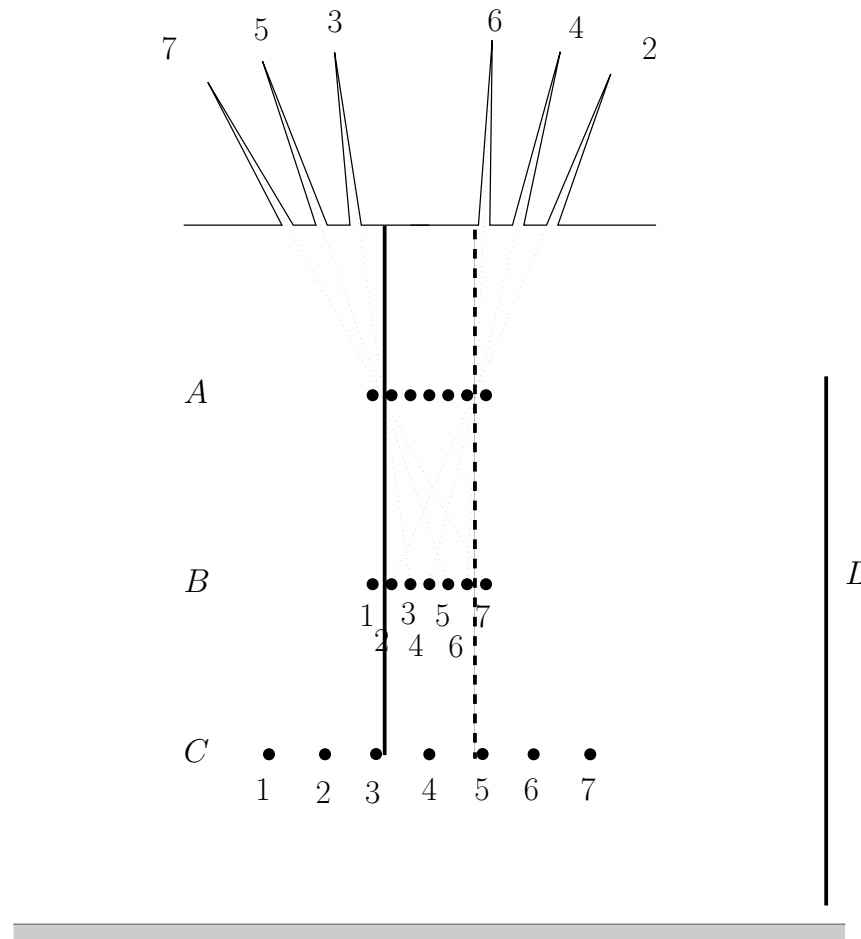
LowerBound.html



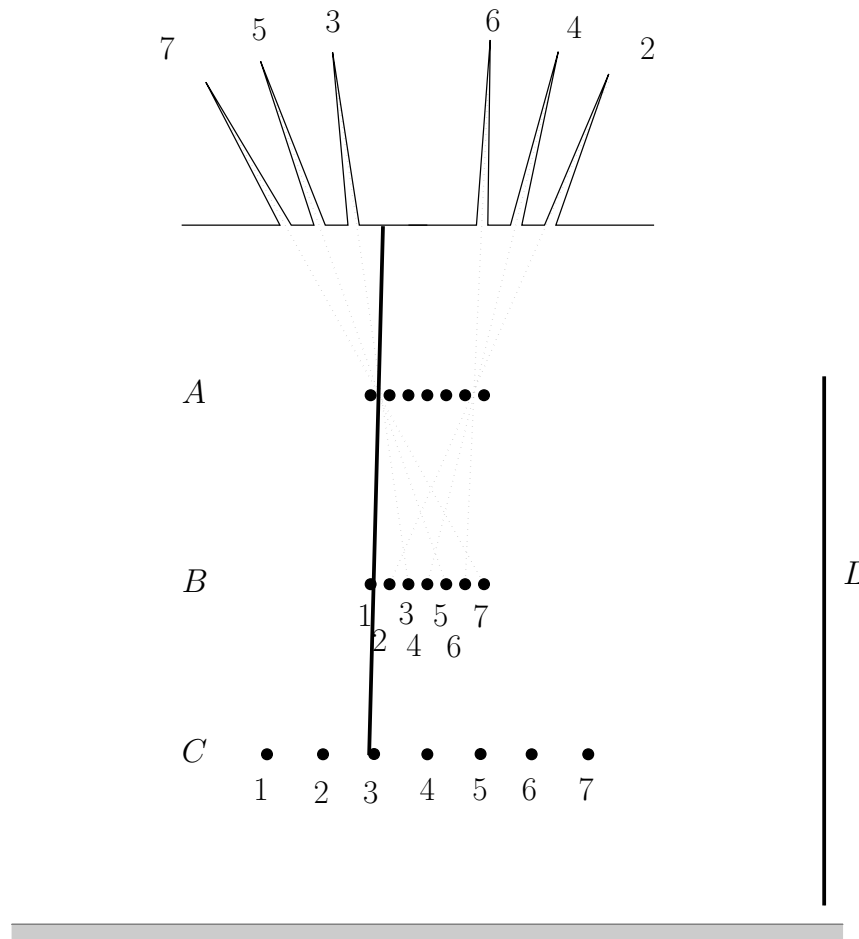


# Untere Schranke! Th. 2.24

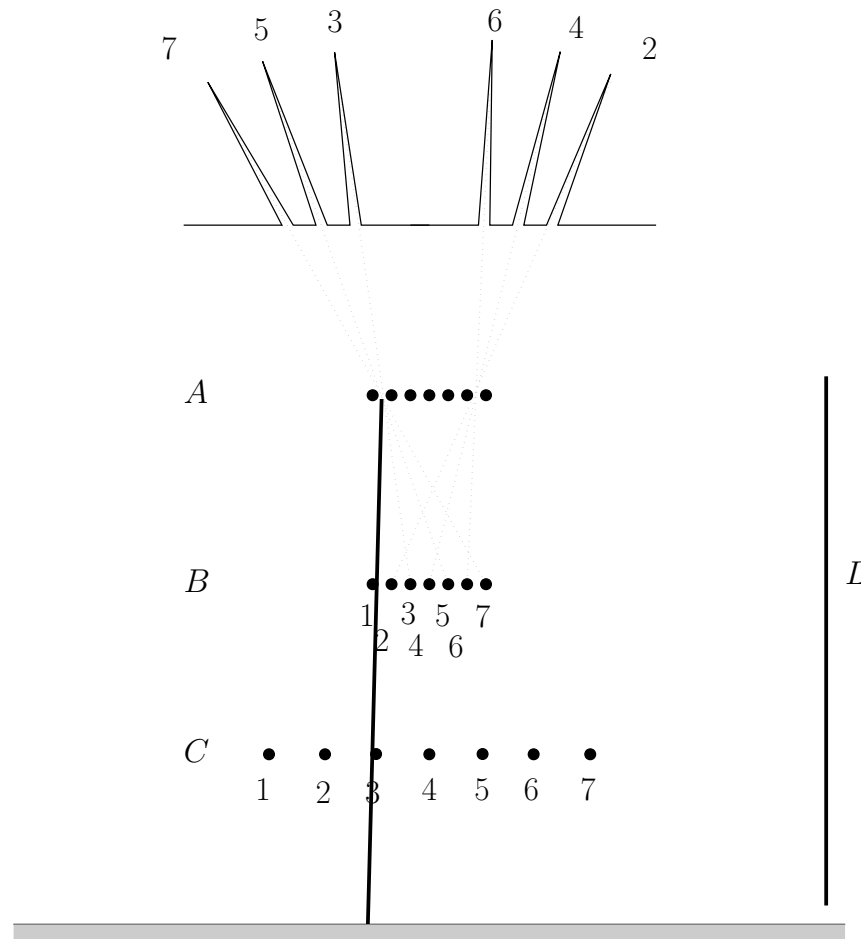
LowerBound.html



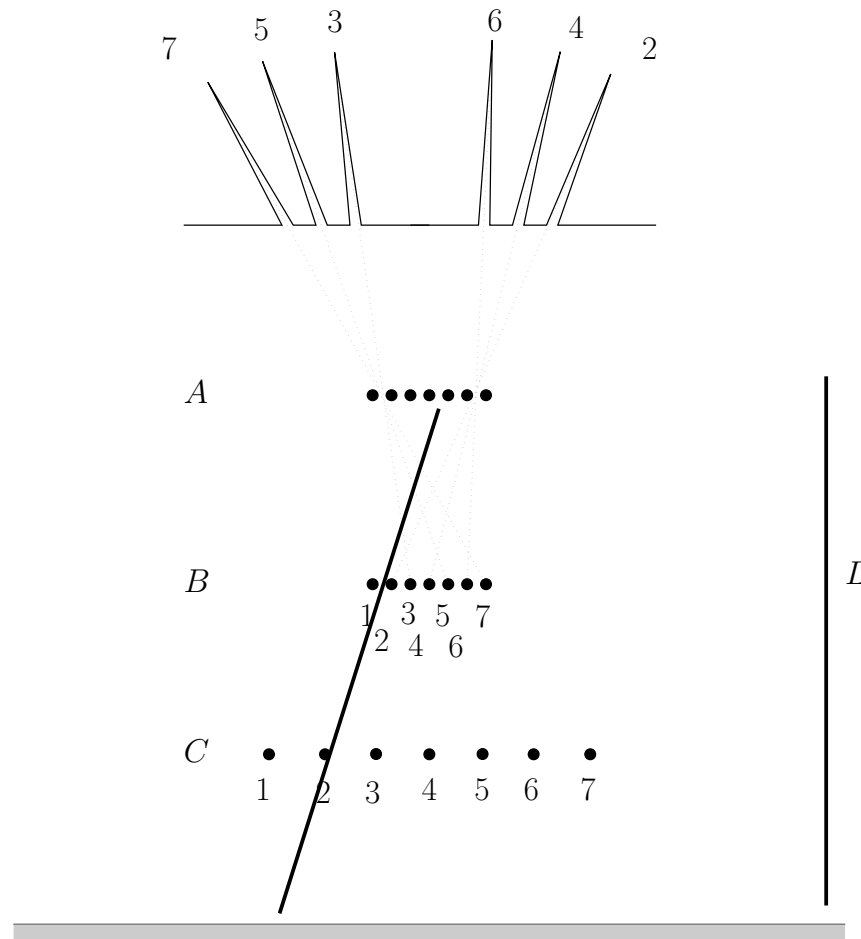
# Untere Schranke! Th. 2.24



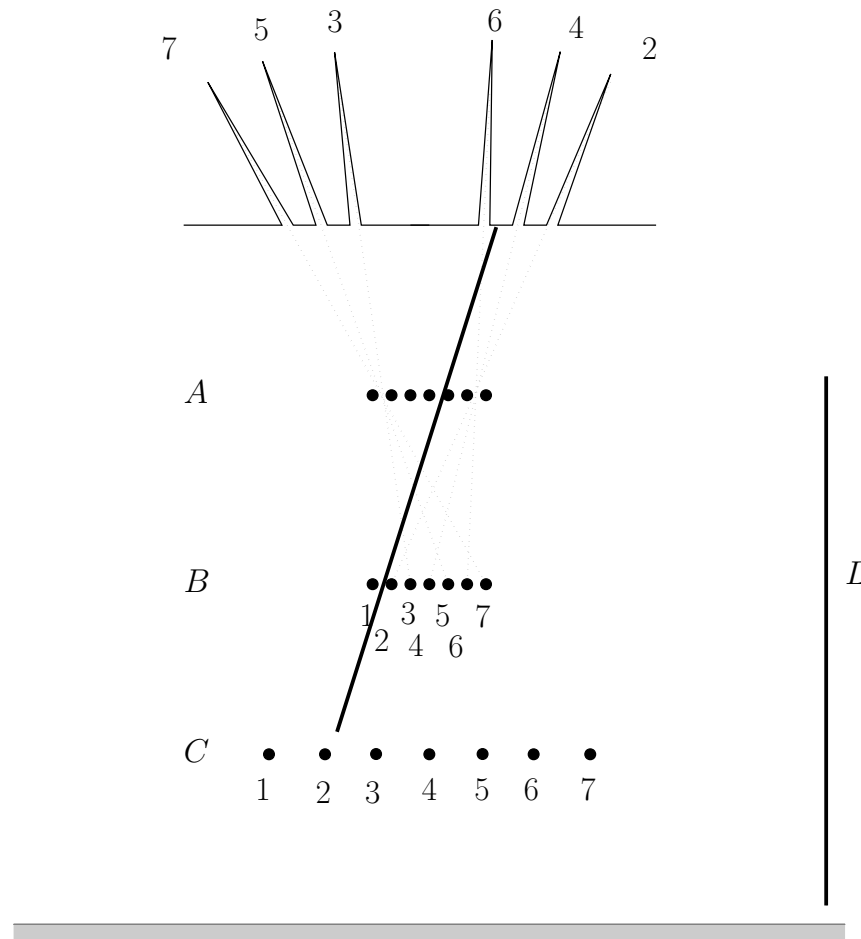
# Untere Schranke! Th. 2.24



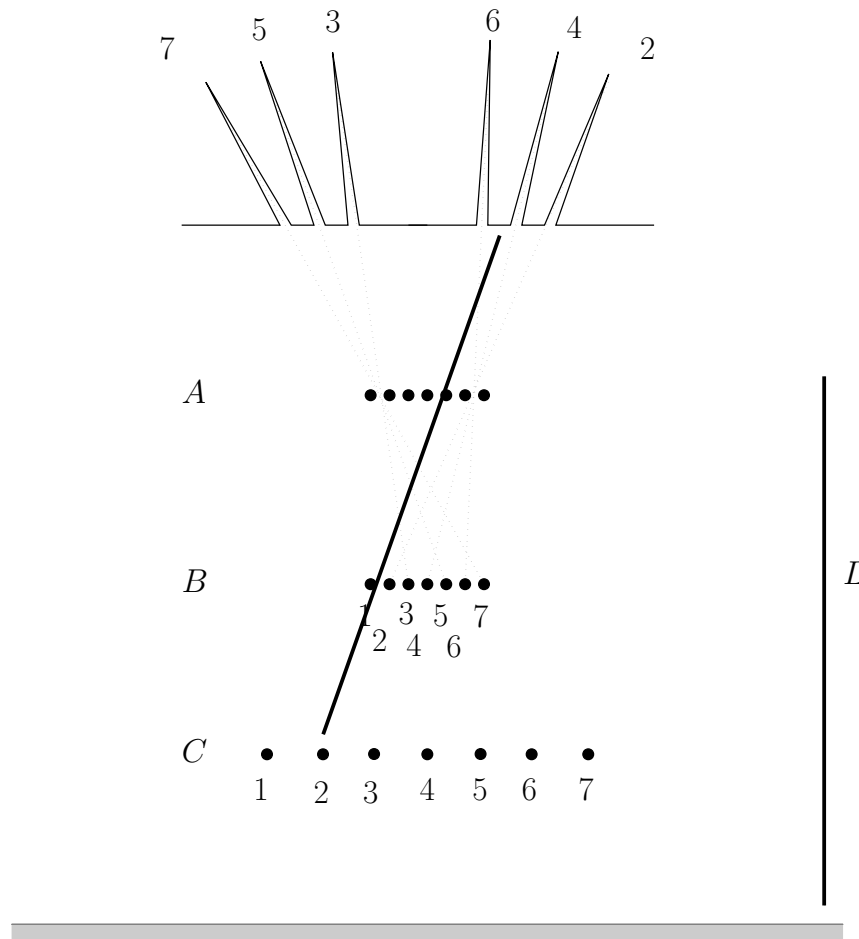
# Untere Schranke! Th. 2.24



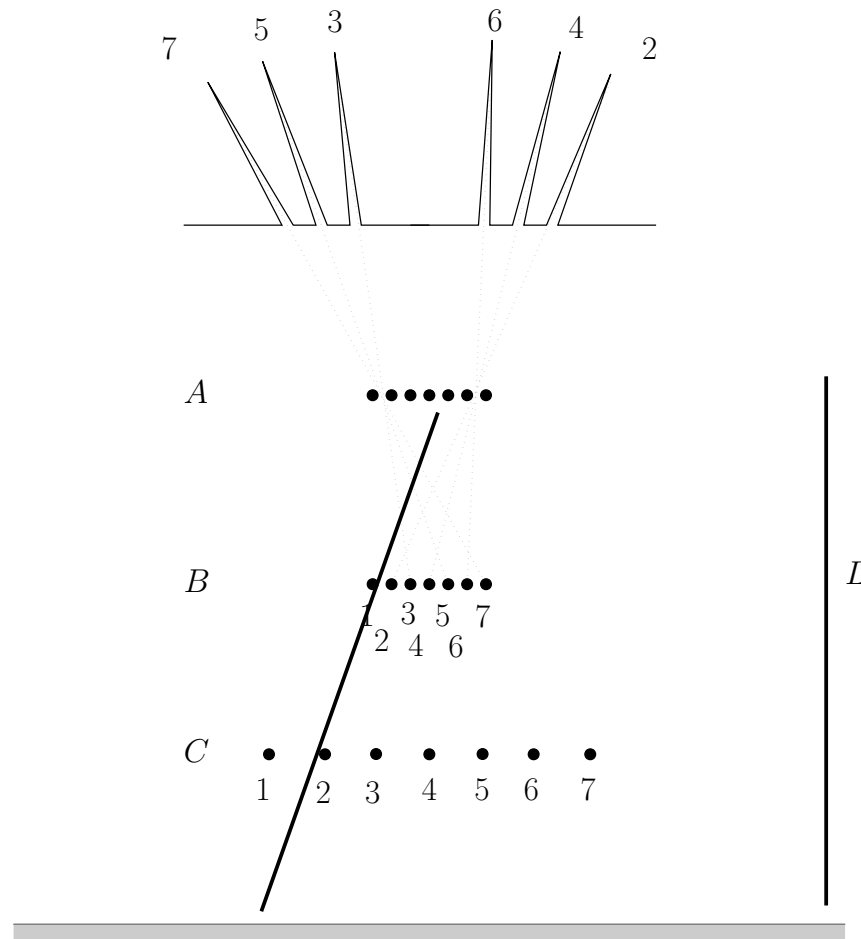
# Untere Schranke! Th. 2.24



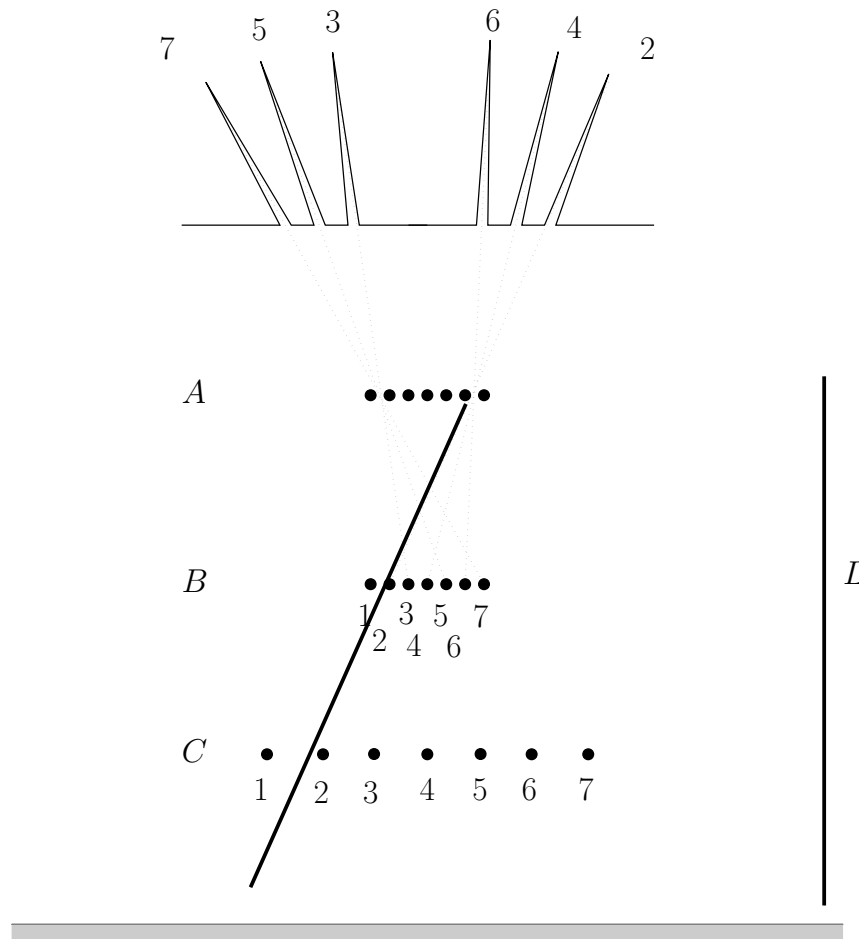
# Untere Schranke! Th. 2.24



# Untere Schranke! Th. 2.24

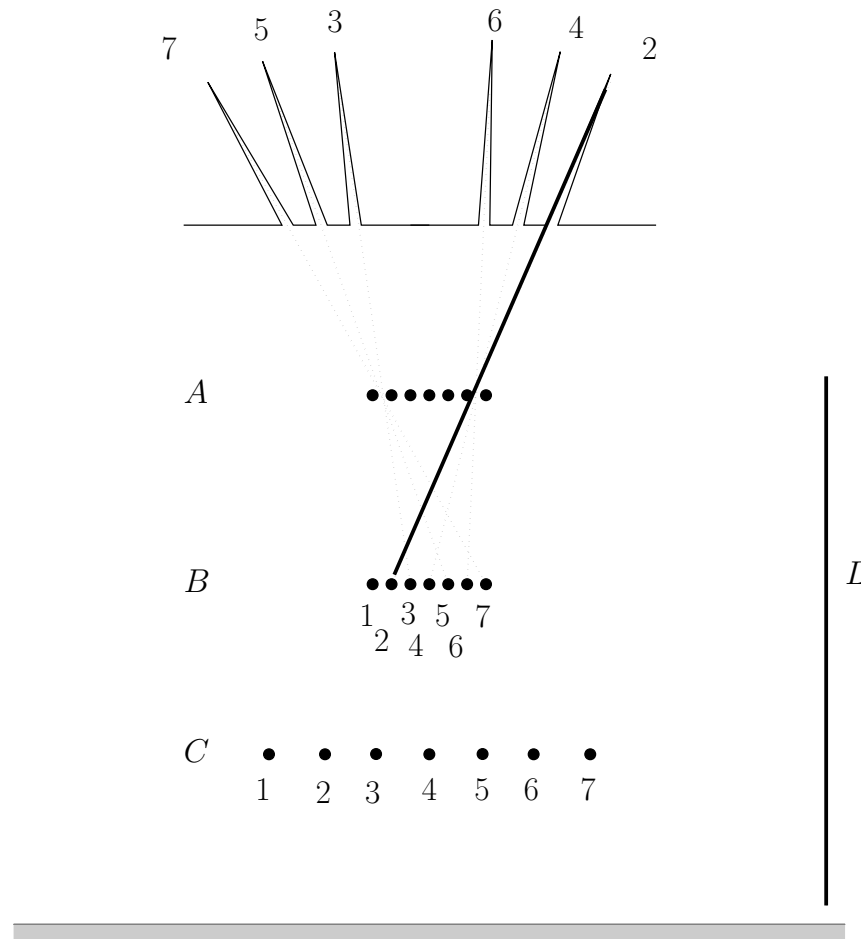


# Untere Schranke! Th. 2.24

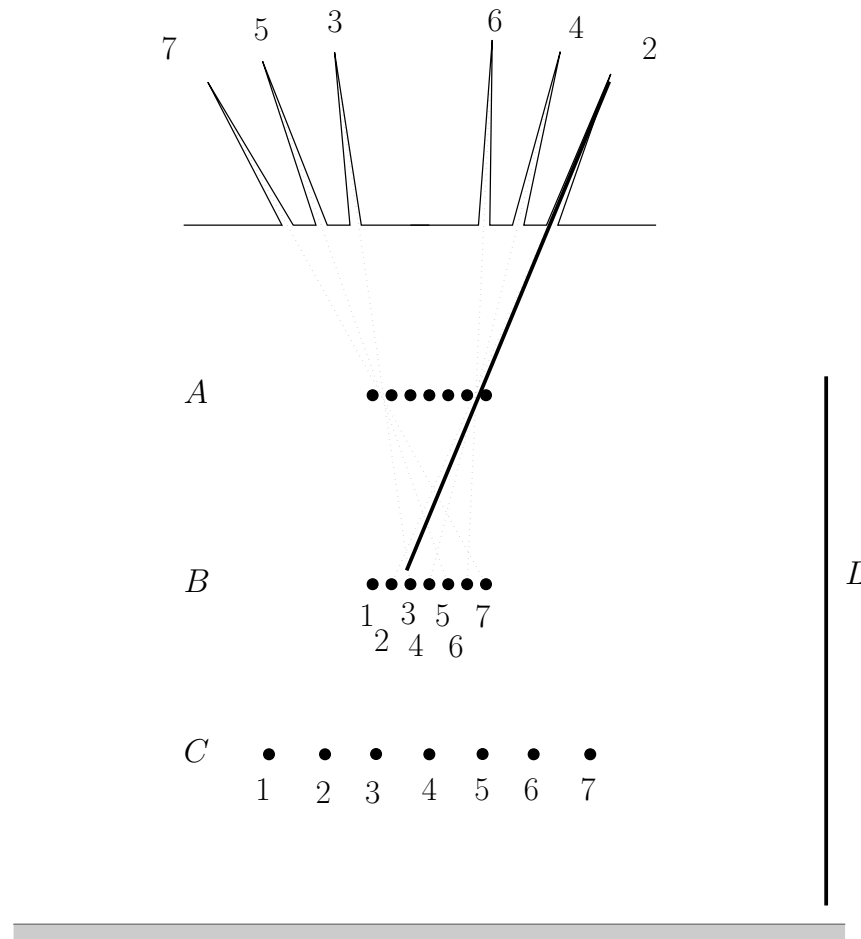




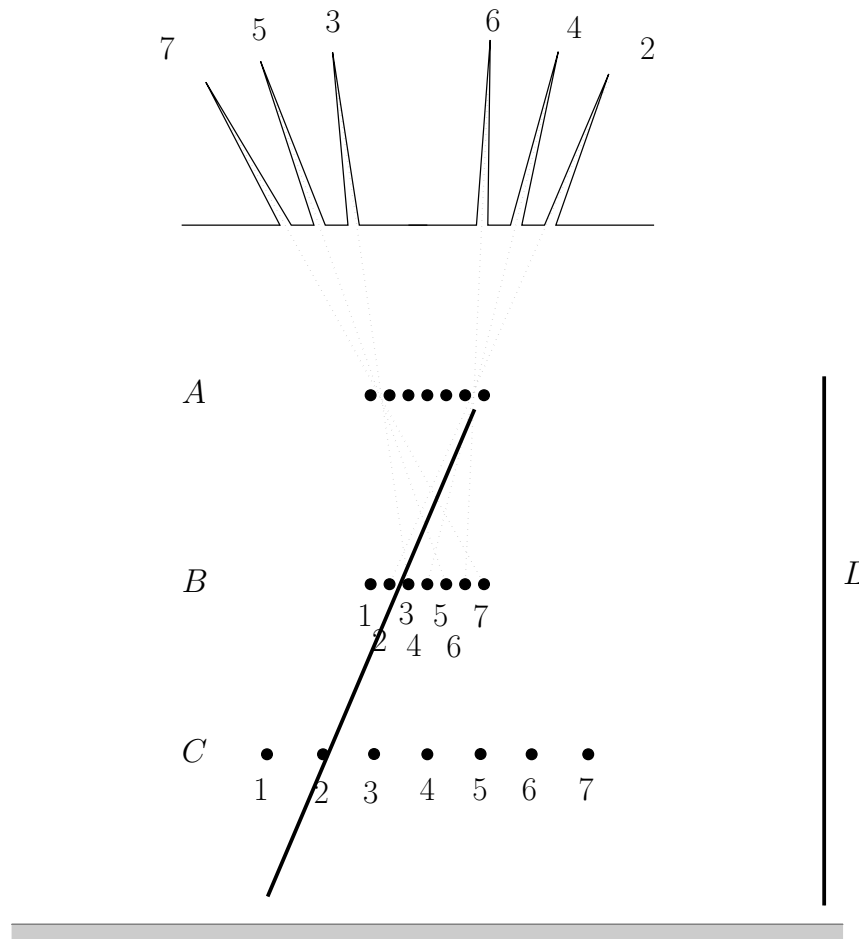
# Untere Schranke! Th. 2.24



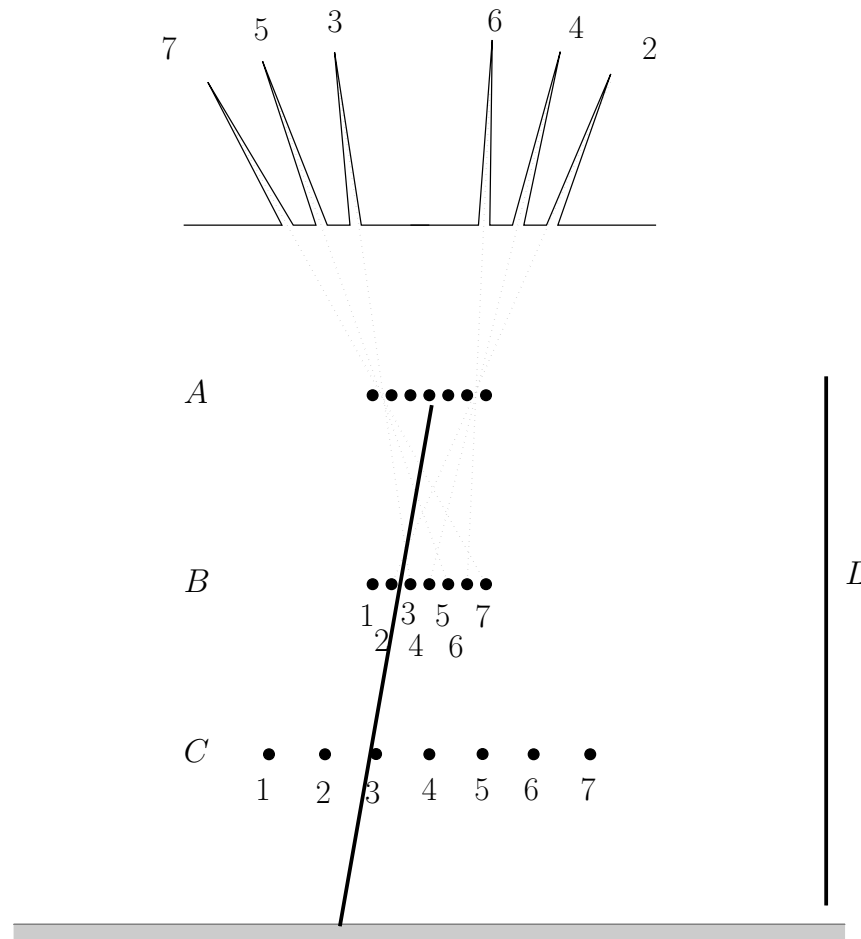
# Untere Schranke! Th. 2.24



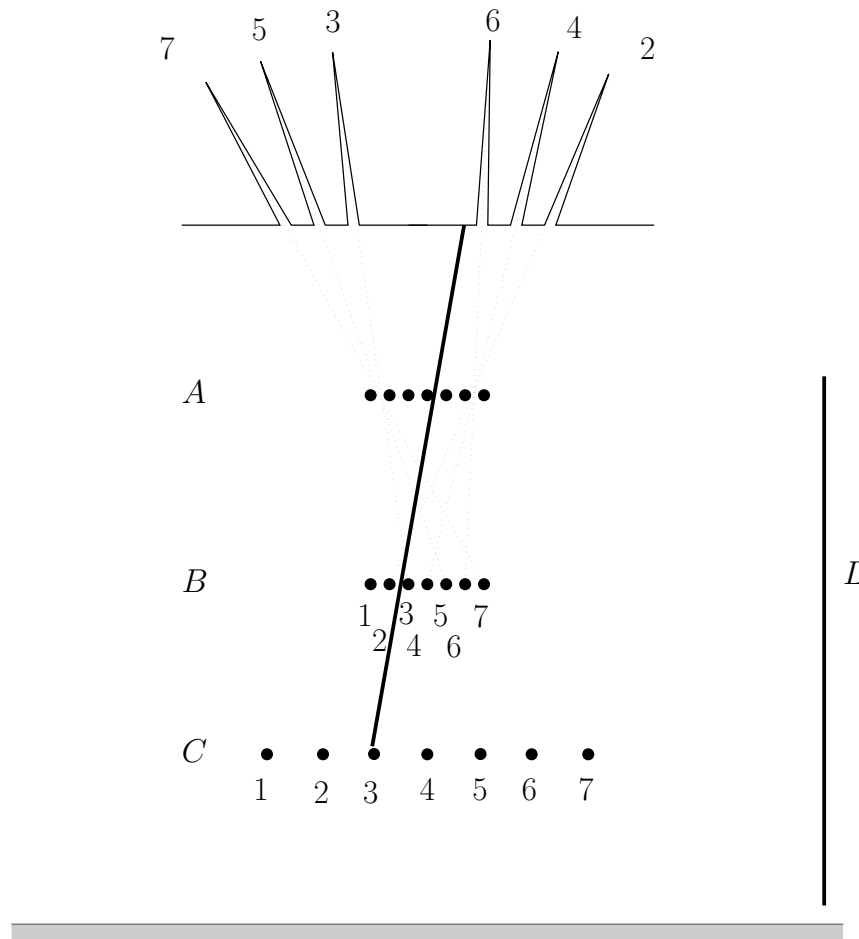
# Untere Schranke! Th. 2.24



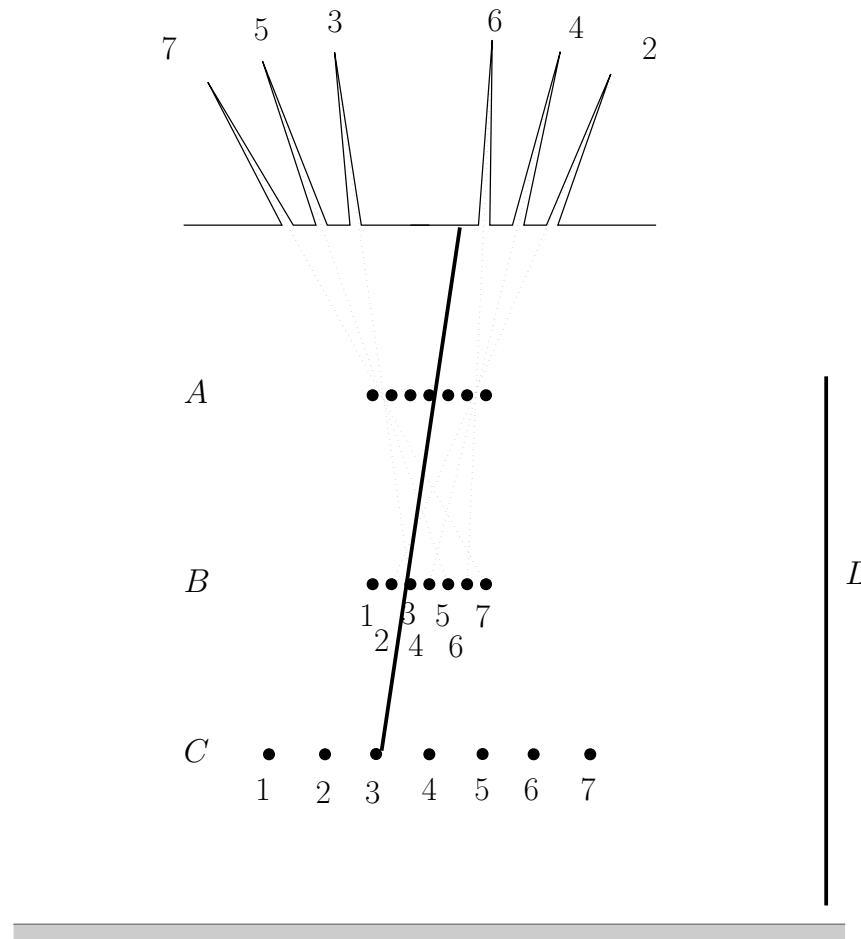
# Untere Schranke! Th. 2.24



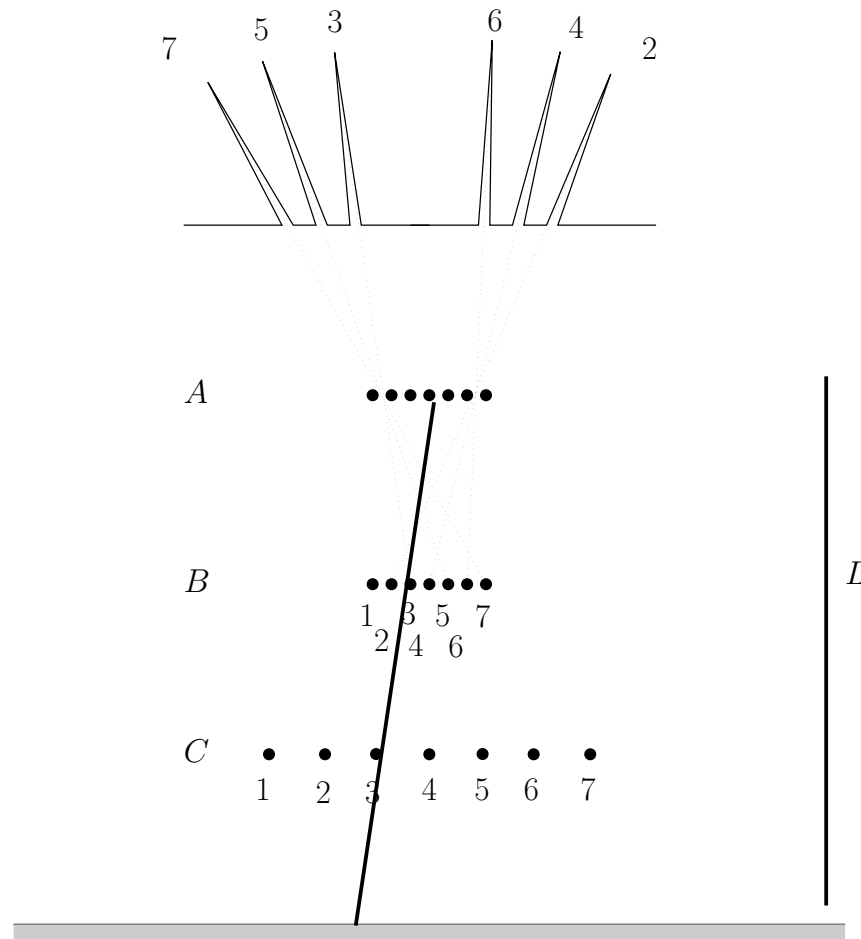
# Untere Schranke! Th. 2.24



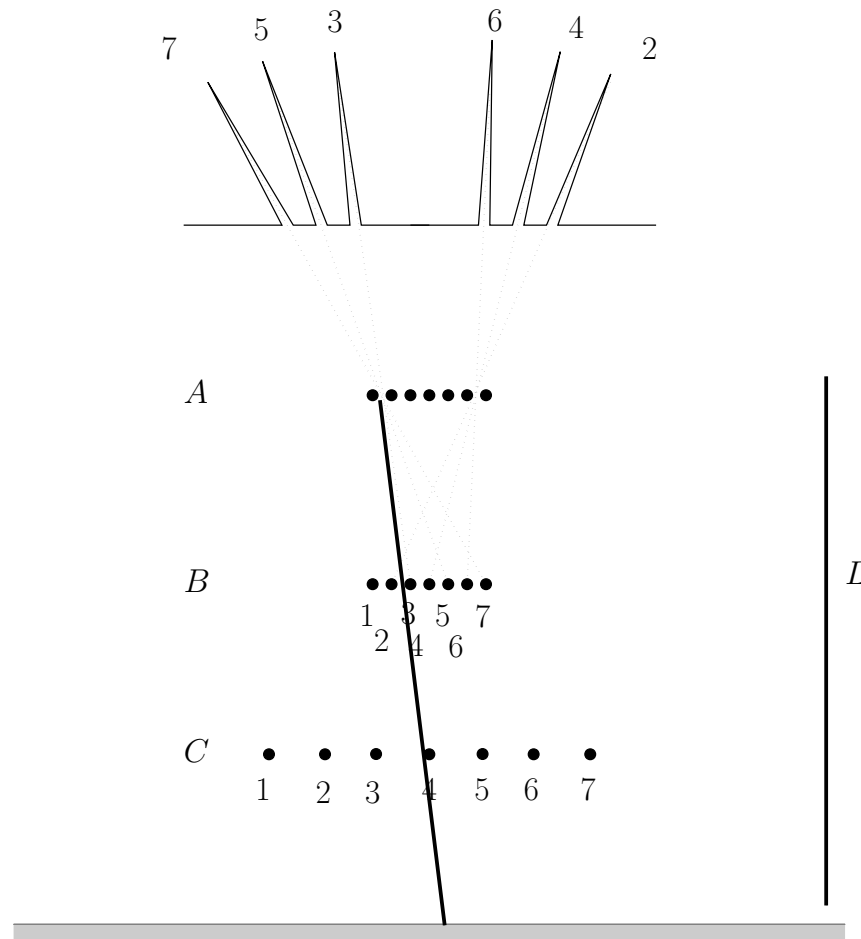
# Untere Schranke! Th. 2.24



# Untere Schranke! Th. 2.24

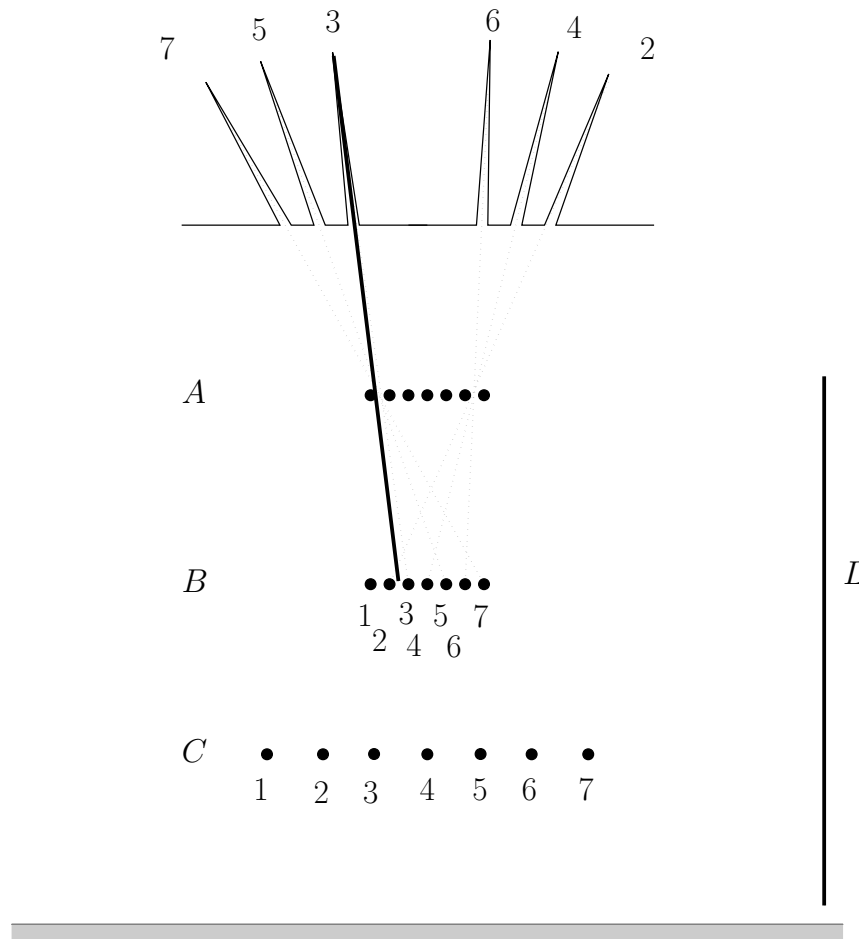


# Untere Schranke! Th. 2.24

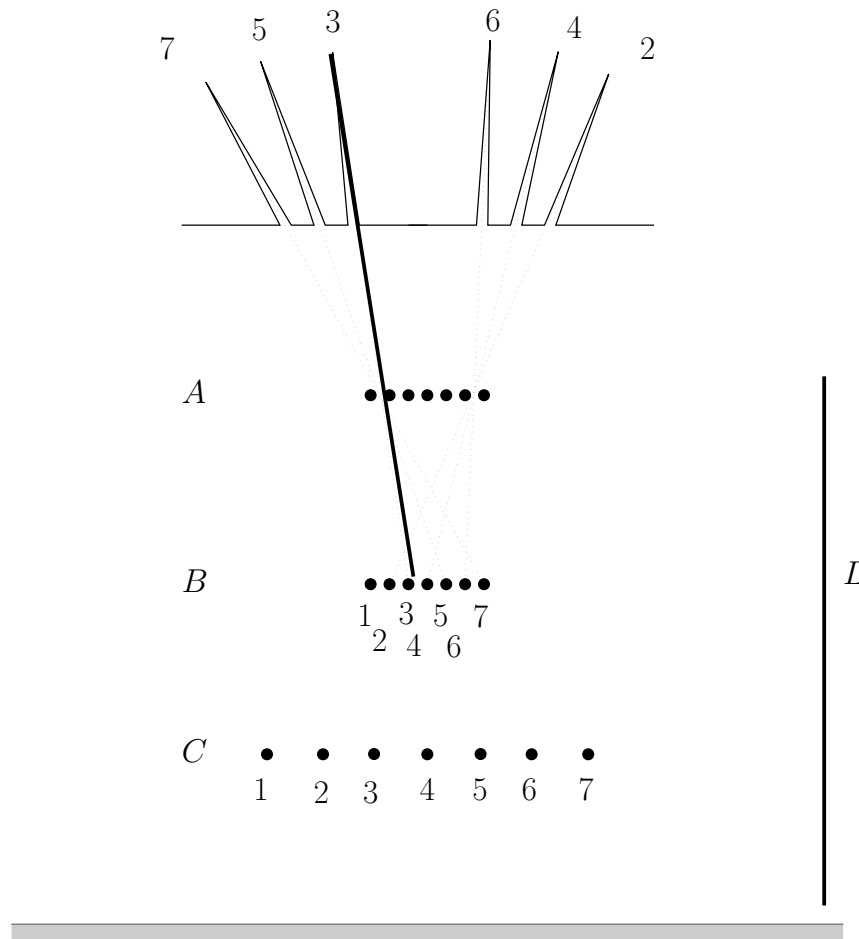




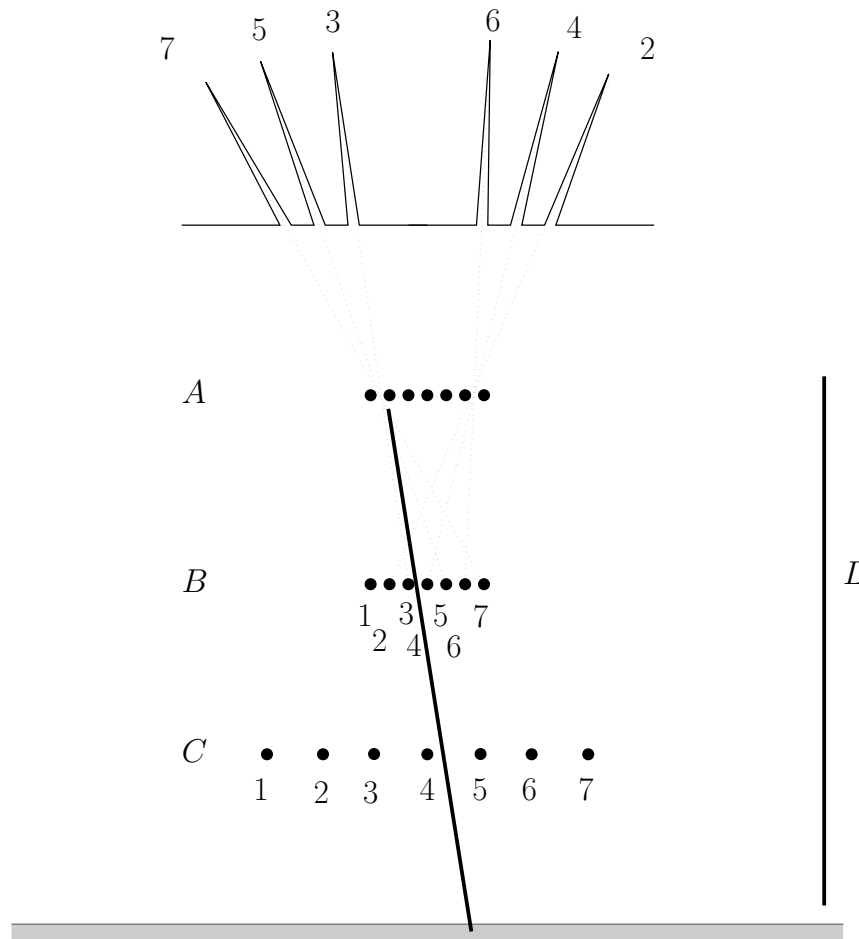
# Untere Schranke! Th. 2.24



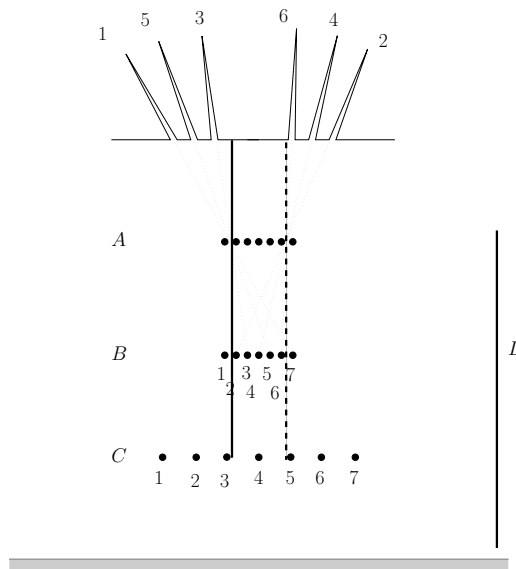
# Untere Schranke! Th. 2.24



# Untere Schranke! Th. 2.24

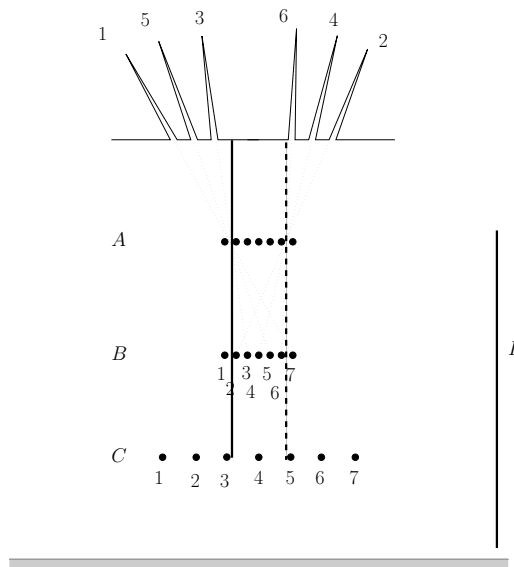


# Untere Schranke! Th. 2.24



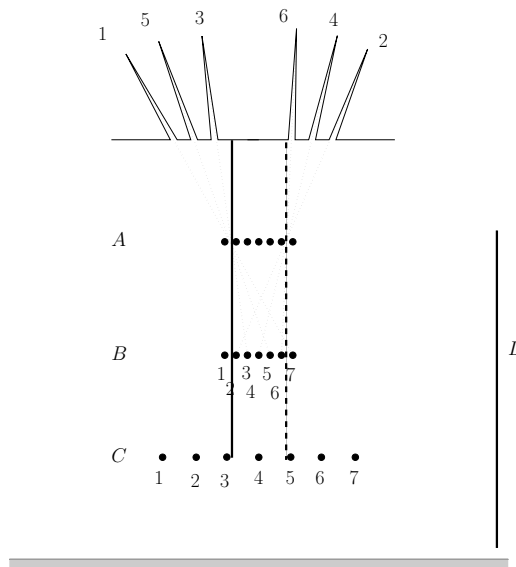
# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden,



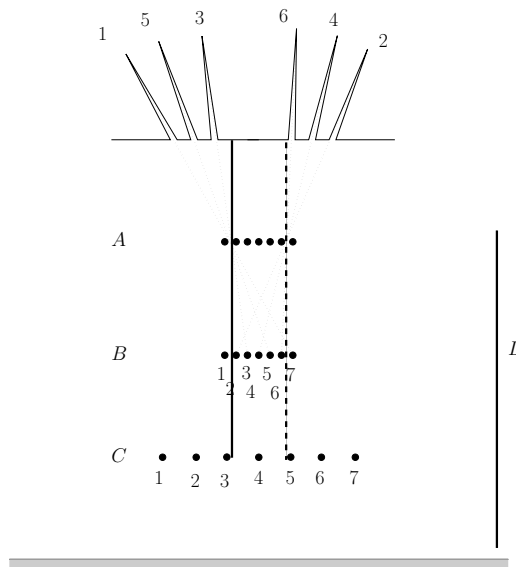
# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe



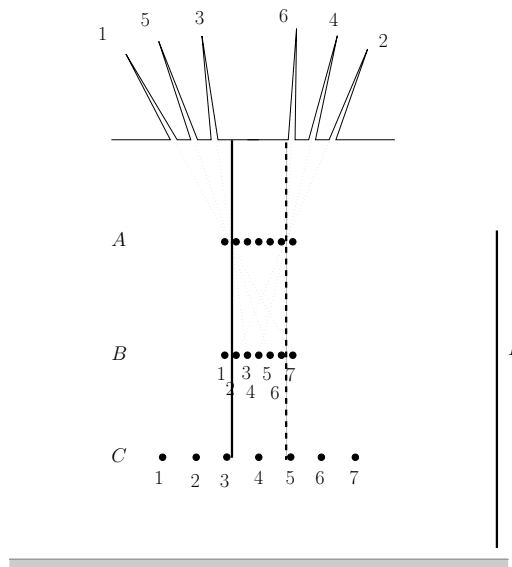
# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $A$  Blöcken überwinden



# Untere Schranke! Th. 2.24

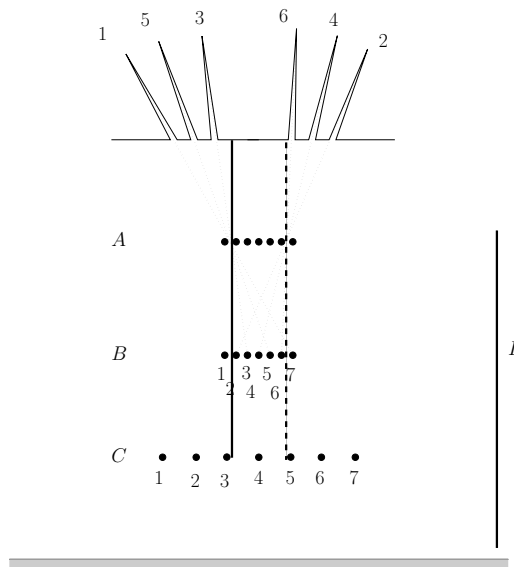
- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $A$  Blöcken überwinden
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $C$  Blöcken überwinden





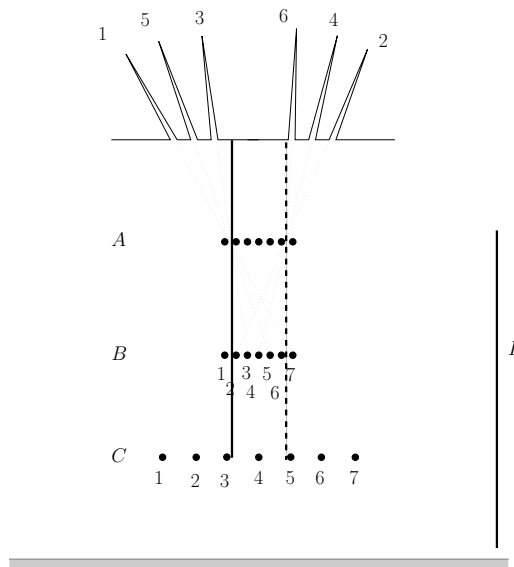
# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $A$  Blöcken überwinden
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $C$  Blöcken überwinden
- Nächster  $B$  Block: zurück!!



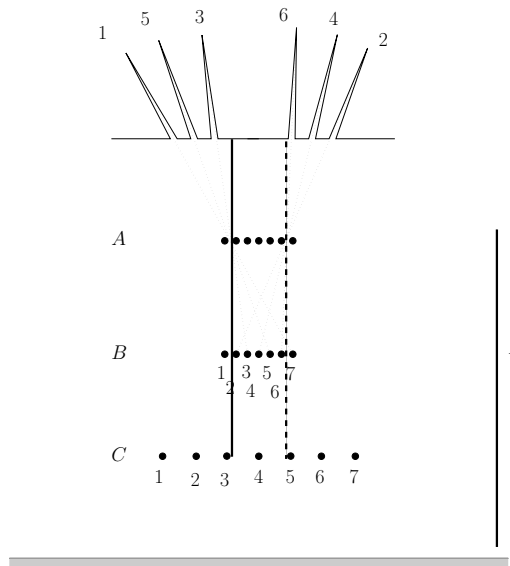
# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $A$  Blöcken überwinden
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $C$  Blöcken überwinden
- Nächster  $B$  Block: zurück!!
- $\Omega(n)$  für jeden  $B$ -Block!

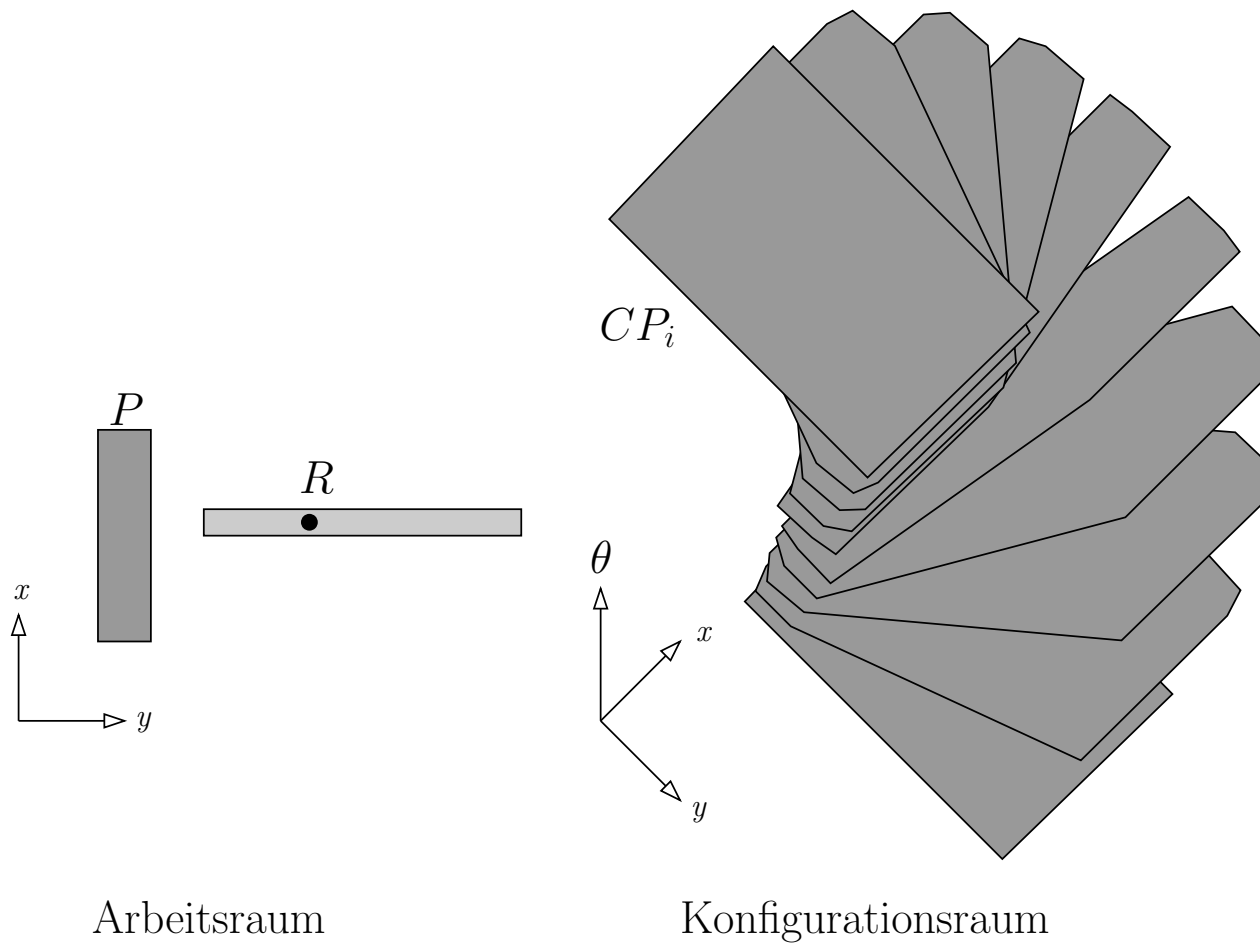


# Untere Schranke! Th. 2.24

- Einen  $B$  Block überwinden, in die Kerbe
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $A$  Blöcken überwinden
- Dazu: Sukzessive Reihe von  $C$  Blöcken überwinden
- Nächster  $B$  Block: zurück!!
- $\Omega(n)$  für jeden  $B$ -Block!  $n$  Blöcke:  $\Omega(n^2)$



# Berechne 3D Konfigurationsraum? Ein Hindernis!



# Ideen!

# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:

# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten

# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:



# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:  $\theta_i = i \cdot \frac{360^\circ}{k}$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$

# Ideen!

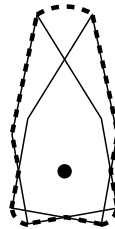
- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:  $\theta_i = i \cdot \frac{360^\circ}{k}$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ 
  - Vereinigung

# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:  $\theta_i = i \cdot \frac{360^\circ}{k}$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ 
  - Vereinigung
  - Problem:  $(x, y, \theta_i), (x, y, \theta_{i+1})$  in  $C_{\text{frei}}$ , dazwischen nicht!

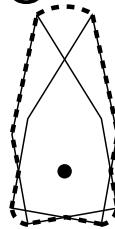
# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:  $\theta_i = i \cdot \frac{360^\circ}{k}$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ 
  - Vereinigung
  - Problem:  $(x, y, \theta_i), (x, y, \theta_{i+1})$  in  $C_{\text{frei}}$ , dazwischen nicht!
  - Abhilfe: Vergrößern!



# Ideen!

- Konfigurationsraum berechnen:
  - Problem: Kurven als Kanten
- Diskrete Orientierungen:  $\theta_i = i \cdot \frac{360^\circ}{k}$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ 
  - Vereinigung
  - Problem:  $(x, y, \theta_i), (x, y, \theta_{i+1})$  in  $C_{\text{frei}}$ , dazwischen nicht!
  - Abhilfe: Vergrößern!
  - Keine Korrekte Bahnplanung!



# Kritische Platzierung: 2.3.1

## Kritische Platzierung: 2.3.1

- Ansatz: Wann ändert sich der Konfigurationsraum substantiell

## Kritische Platzierung: 2.3.1

- Ansatz: Wann ändert sich der Konfigurationsraum substantiell
- Neue *Kante*, neuer Knoten



## Kritische Platzierung: 2.3.1

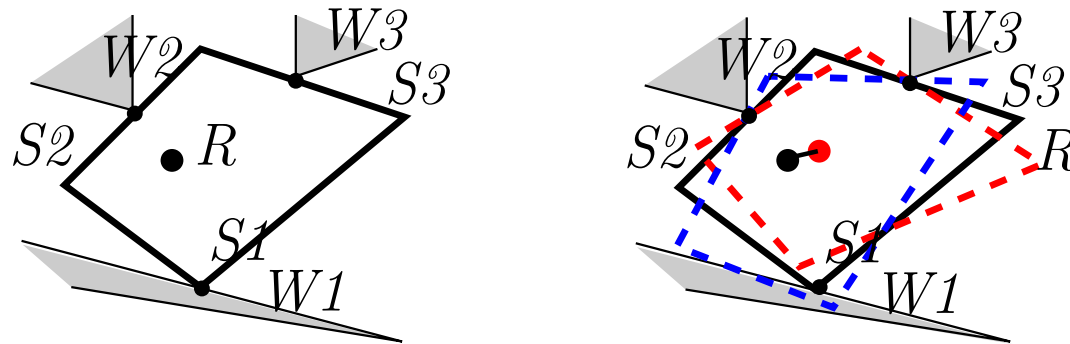
- Ansatz: Wann ändert sich der Konfigurationsraum substantiell
- Neue *Kante*, neuer Knoten
- Definition: Kritische Platzierungen

## Kritische Platzierung: 2.3.1

- Ansatz: Wann ändert sich der Konfigurationsraum substantiell
- Neue *Kante*, neuer Knoten
- Definition: Kritische Platzierungen
- Zum Beispiel bei Kontakten mit Hindernissen!

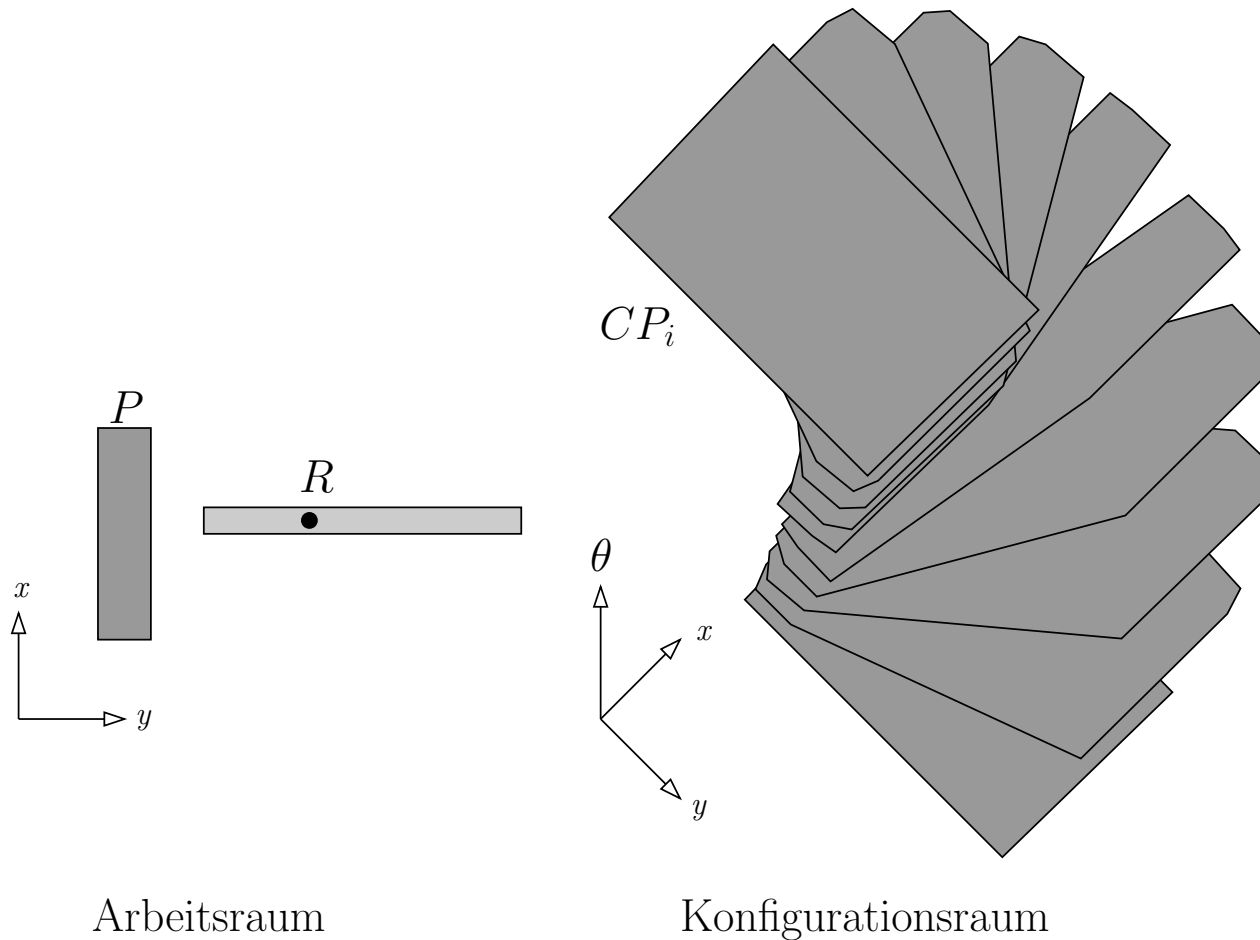
## Kritische Platzierung: 2.3.1

- Ansatz: Wann ändert sich der Konfigurationsraum substantiell
- Neue *Kante*, neuer Knoten
- Definition: Kritische Platzierungen
- Zum Beispiel bei Kontakten mit Hindernissen!



# Änderung des Konfigurationsraumes!

Auch bei Wechsel parallel und nicht-parallel! Neue Knoten



# Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

# Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,

## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,  $W$  berührt  $S$



## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,  $W$  berührt  $S$

- i)  $W$  ist eine Hinderniskante und  $S$  eine Roboterecke (Typ I) oder
- ii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterkante (Typ II) oder
- iii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterecke (Typ III)

## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,  $W$  berührt  $S$

- i)  $W$  ist eine Hinderniskante und  $S$  eine Roboterecke (Typ I) oder
- ii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterkante (Typ II) oder
- iii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterecke (Typ III)

Freie Platzierung  $(x, y, \theta)$ :

## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,  $W$  berührt  $S$

- i)  $W$  ist eine Hinderniskante und  $S$  eine Roboterecke (Typ I) oder
- ii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterseite (Typ II) oder
- iii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterecke (Typ III)

Freie Platzierung  $(x, y, \theta)$ : Kritische Platzierung

## Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**

$R$  konvexer Roboter  $m$  Ecken,  $P_i$  polygonale Hindernisse

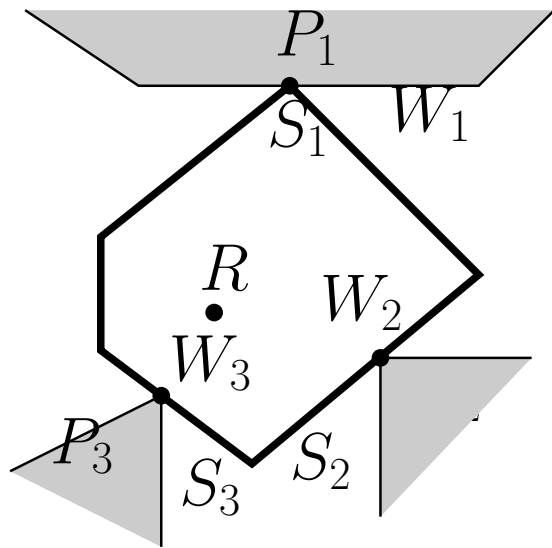
Kontaktpaar  $O = (W, S)$ ,  $W$  berührt  $S$

- i)  $W$  ist eine Hinderniskante und  $S$  eine Roboterecke (Typ I) oder
- ii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterkante (Typ II) oder
- iii)  $W$  ist eine Hindernisecke und  $S$  eine Roboterecke (Typ III)

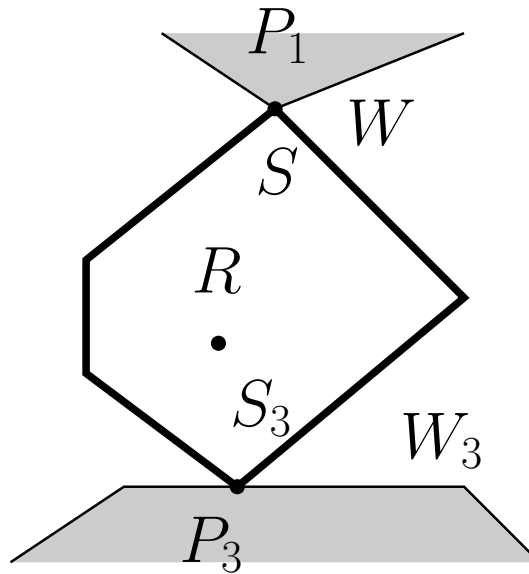
Freie Platzierung  $(x, y, \theta)$ : Kritische Platzierung

- drei paarweise verschiedene Kontaktpaare vom Typ I oder II oder
- Kontaktpaar vom Typ III und Kontaktpaar vom Typ I oder II

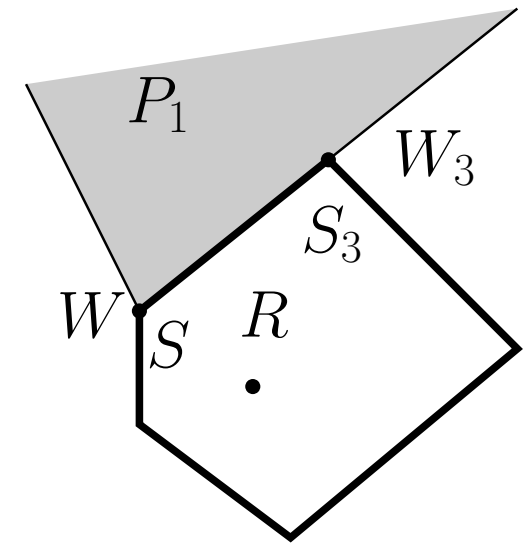
# Kritische Platzierungen **Def.: 2.27**



(i)



(ii)



(iii)

# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!

# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

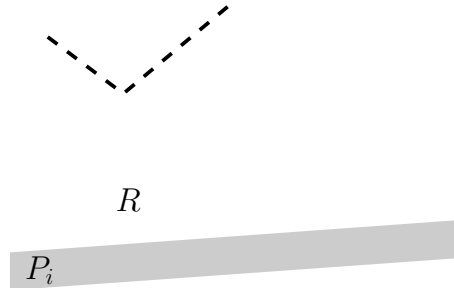
Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!





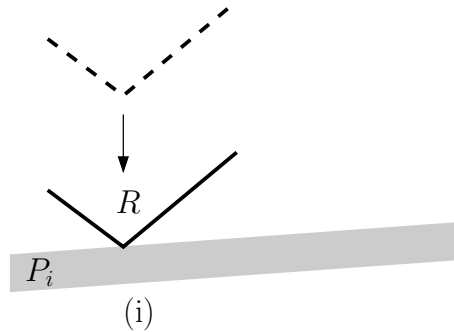
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



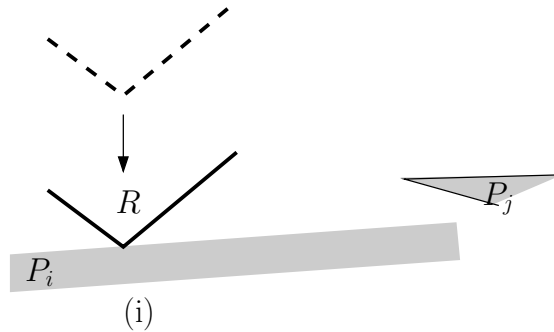
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



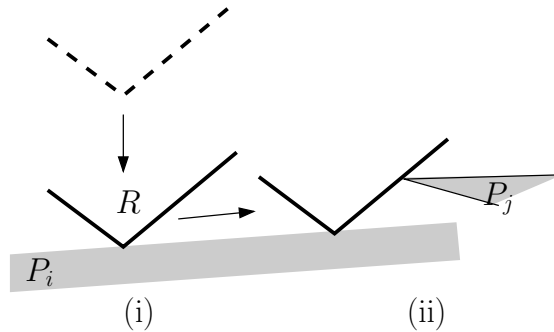
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



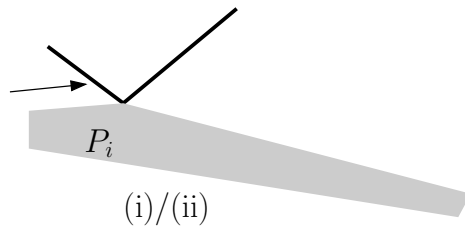
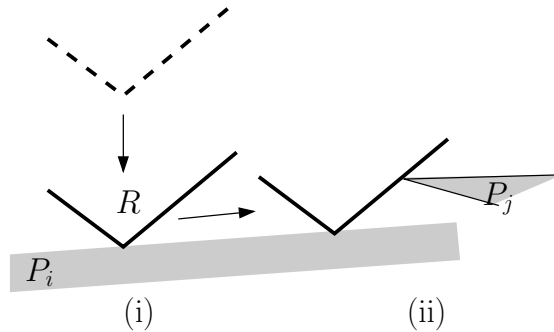
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



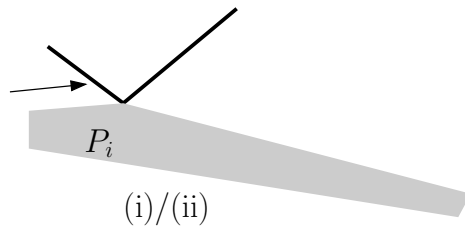
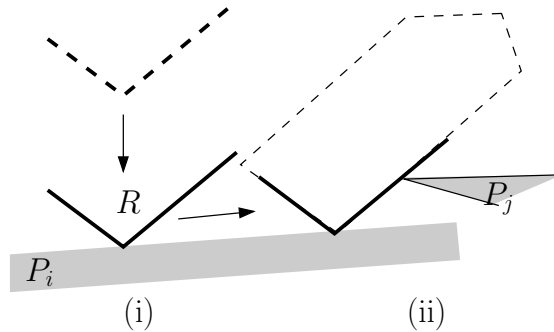
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



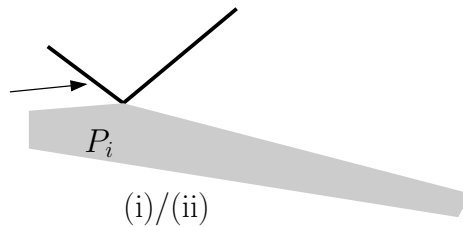
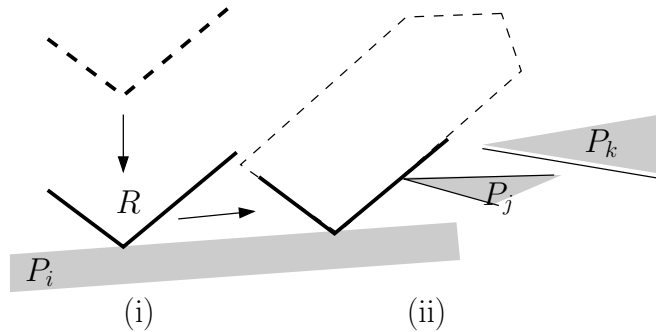
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



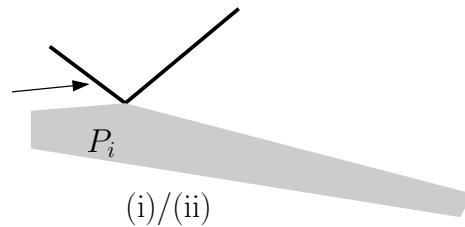
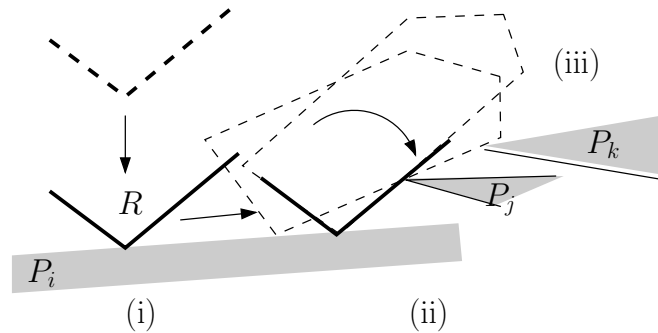
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

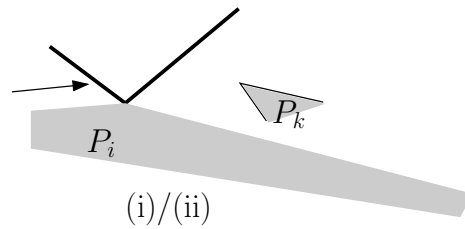
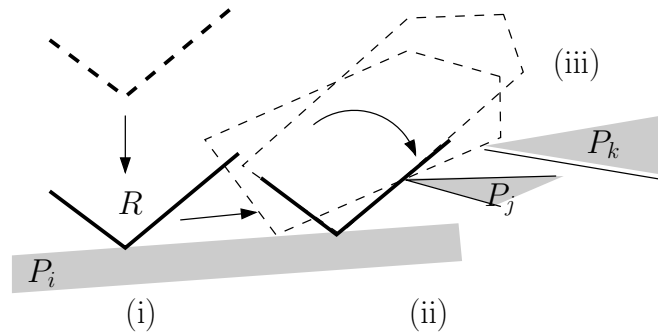
Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!





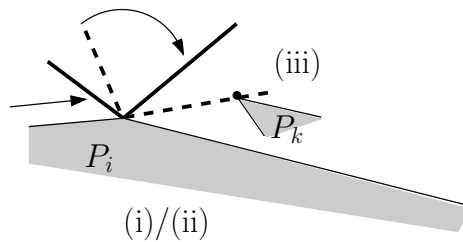
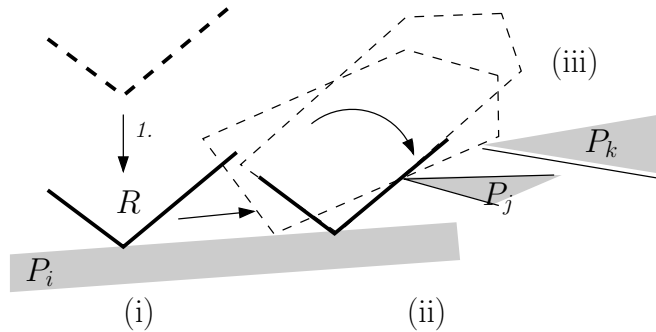
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



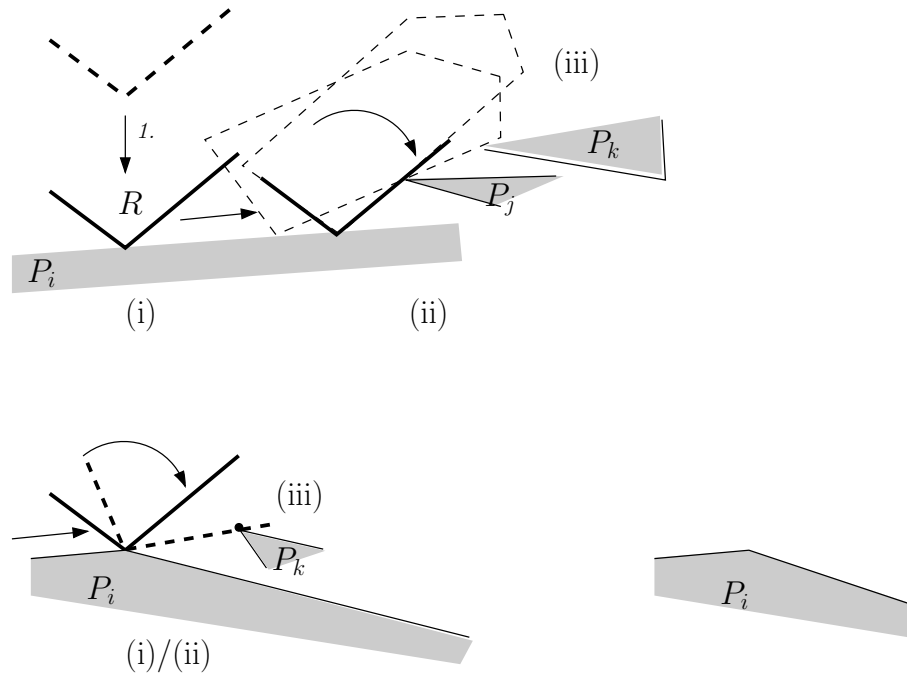
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



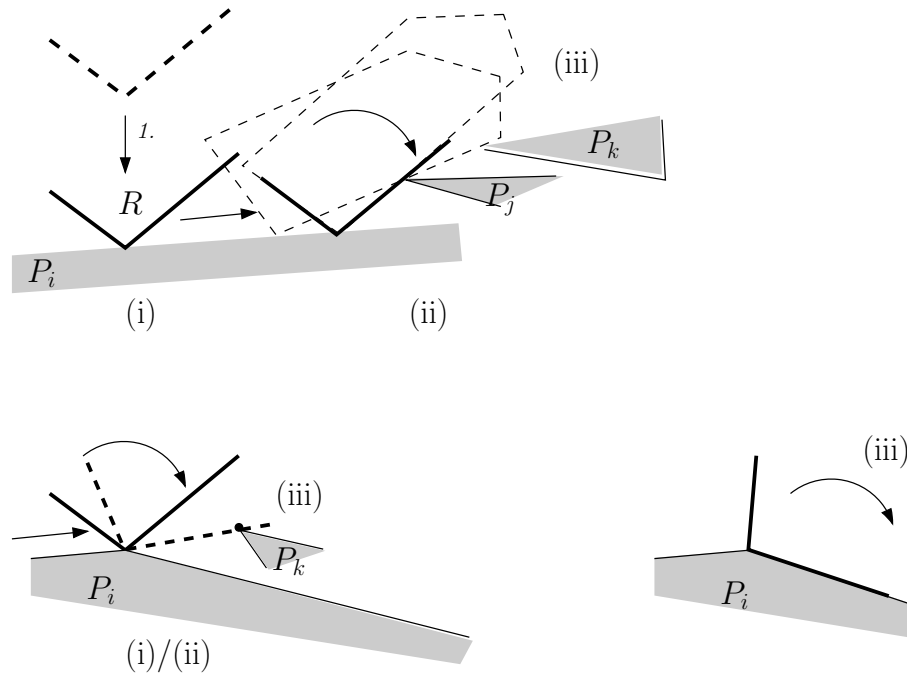
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



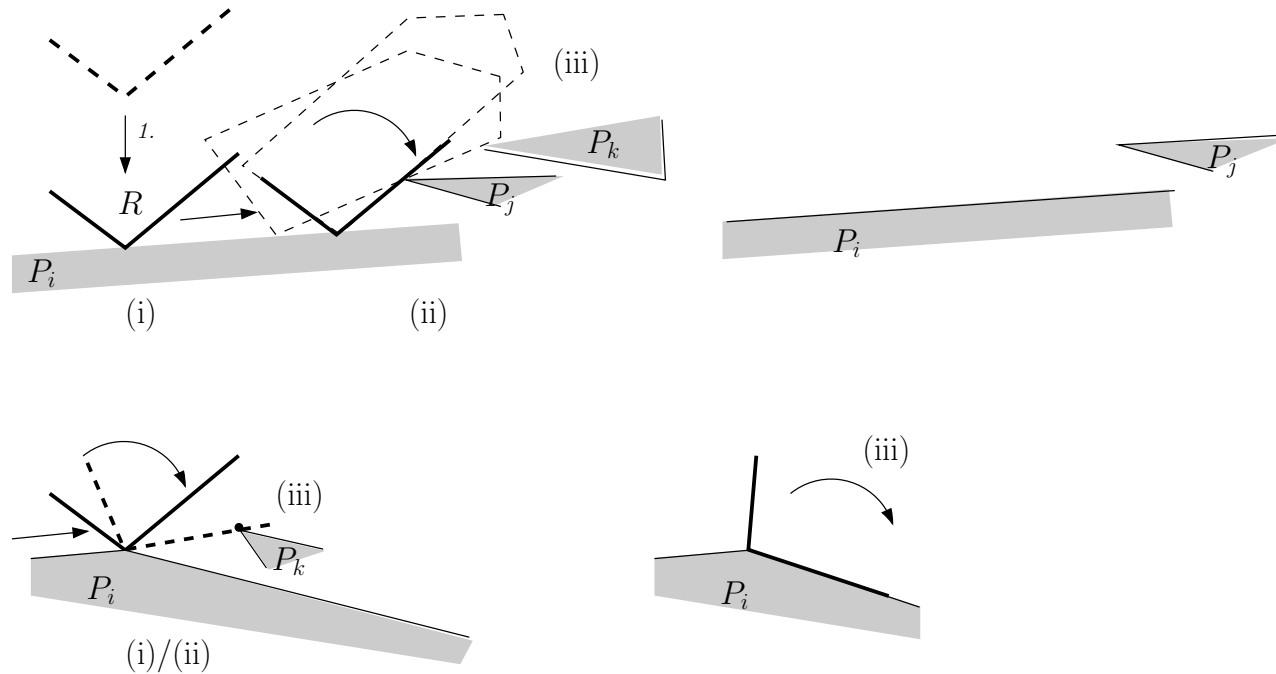
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



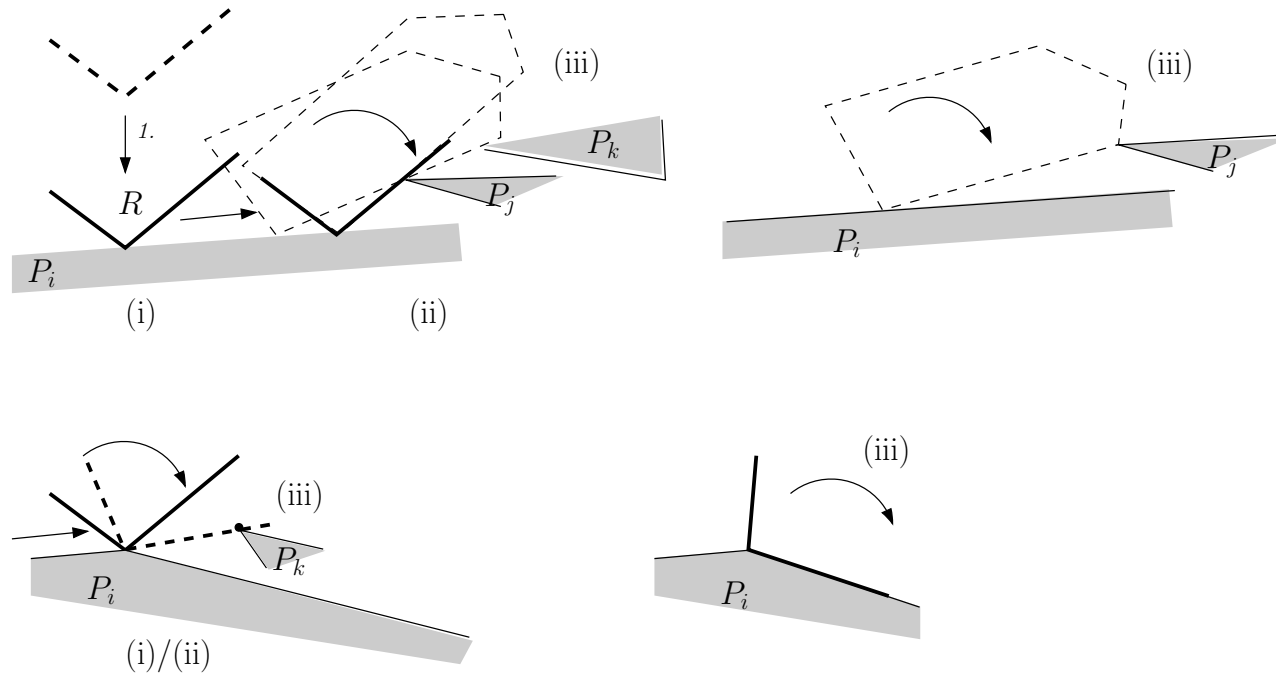
# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



# Zelle $C_{frei}$ : Kritische Platzierungen **Lem.: 2.28**

Jede Zelle von  $C_{frei}$  besitzt Krit. Platzierung!



# Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

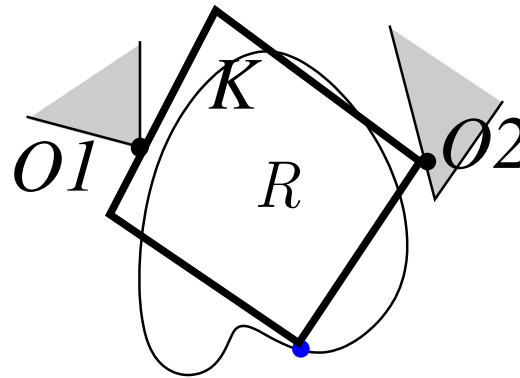
## Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

- Zwei Kontakte behalten



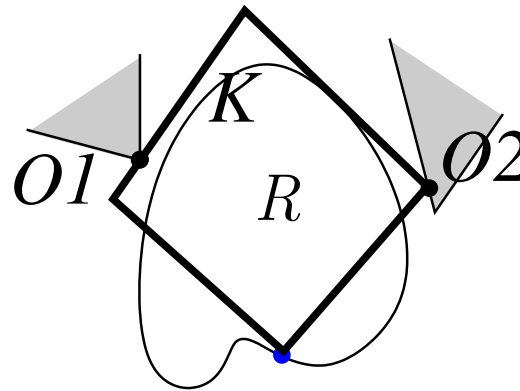
## Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

- Zwei Kontakte behalten
- Kurve eines Referenzpunktes  $(x, y)$



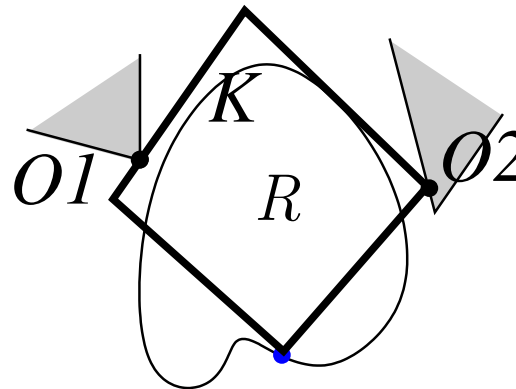
## Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

- Zwei Kontakte behalten
- Kurve eines Referenzpunktes  $(x, y)$



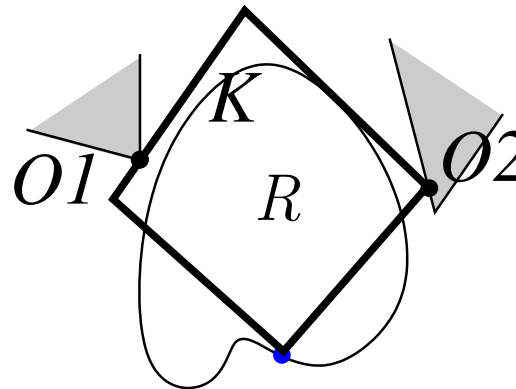
## Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

- Zwei Kontakte behalten
- Kurve eines Referenzpunktes  $(x, y)$
- Parametrisierung: Grad 4

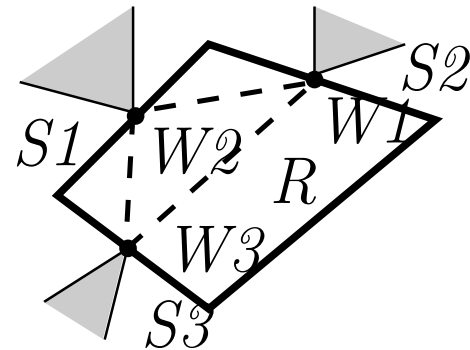
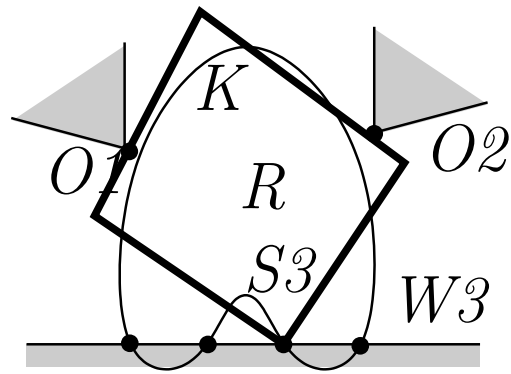


## Kurven in $C_{frei}$ ! **Bem. 2.29**

- Zwei Kontakte behalten
- Kurve eines Referenzpunktes  $(x, y)$
- Parametrisierung: Grad 4 (Übungsaufgabe)

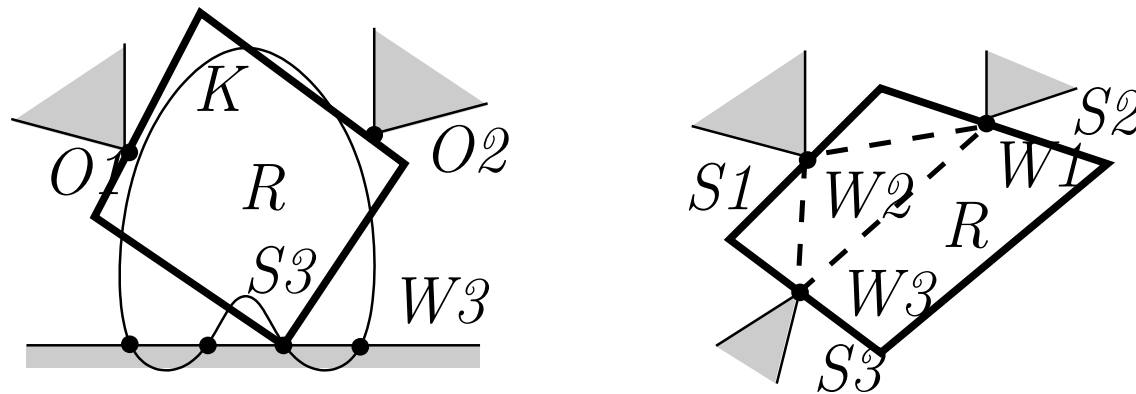


# Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**



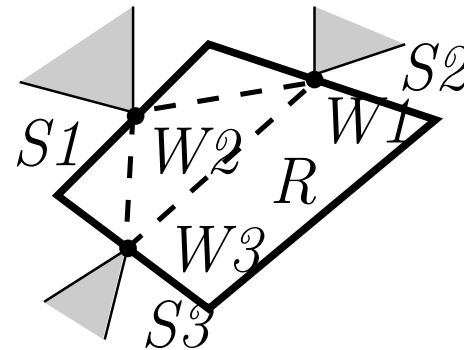
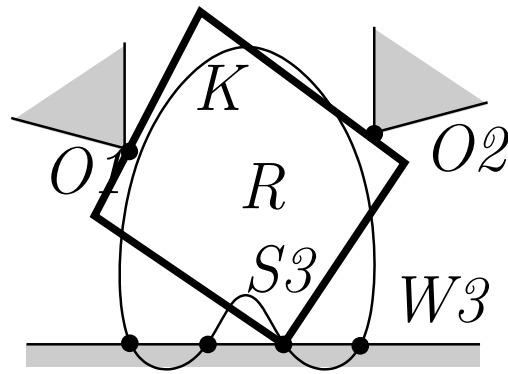
# Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**

- Drei Kontaktpaare  $O_i = (W_i, S_i)$



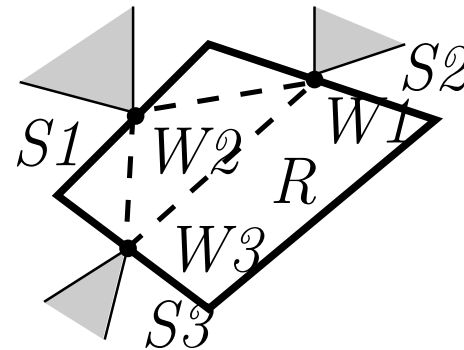
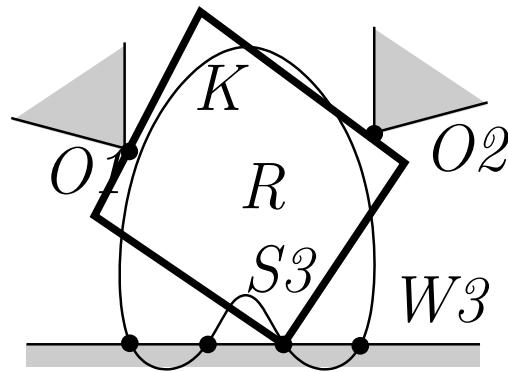
## Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**

- Drei Kontaktpaare  $O_i = (W_i, S_i)$
- 2 Fälle: Zwei festhalten oder die Hindernisse bewegen



## Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**

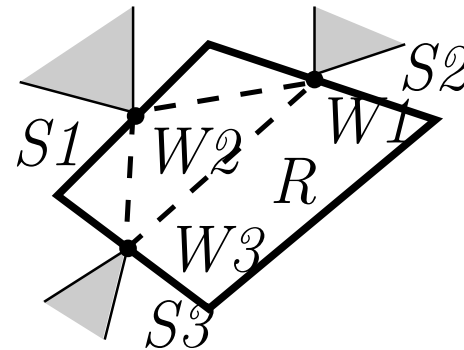
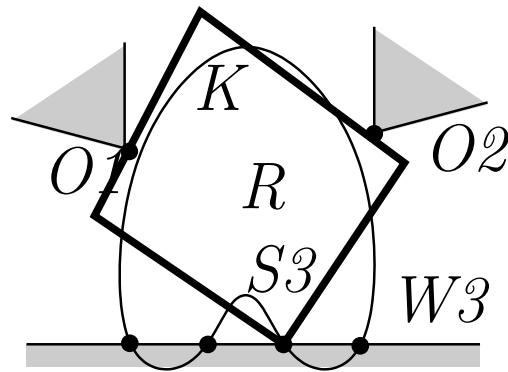
- Drei Kontaktpaare  $O_i = (W_i, S_i)$
- 2 Fälle: Zwei festhalten oder die Hindernisse bewegen
- Kurve Grad 4 (Bem. 2.29) und Grad 1 schneiden





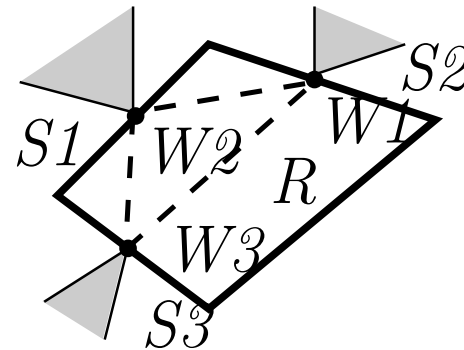
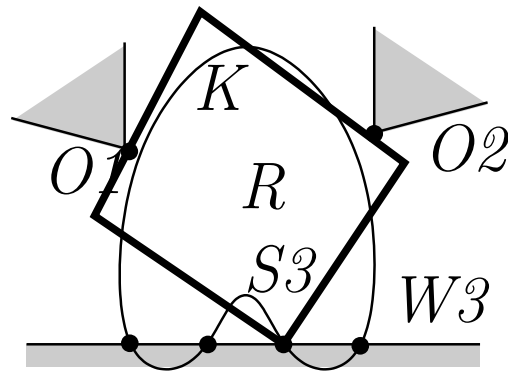
## Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**

- Drei Kontaktpaare  $O_i = (W_i, S_i)$
- 2 Fälle: Zwei festhalten oder die Hindernisse bewegen
- Kurve Grad 4 (Bem. 2.29) und Grad 1 schneiden
- Höchstens vier mal kommt das vor!



## Anzahl Kontakte: **Kor. 2.30**

- Drei Kontaktpaare  $O_i = (W_i, S_i)$
- 2 Fälle: Zwei festhalten oder die Hindernisse bewegen
- Kurve Grad 4 (Bem. 2.29) und Grad 1 schneiden
- Höchstens vier mal kommt das vor!
- Typ III und Typ I/II?



**Anzahl Krit. Platzierungen: Th. 2.31**

## Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke

## Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke
- $2mn$  Kontaktpaare Typ I/II

## Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke
- $2mn$  Kontaktpaare Typ I/II
- Je drei auswählen:  $\binom{2mn}{3} \in O(m^3n^3)$

## Anzahl Krit. Platzierungen: Th. 2.31

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke
- $2mn$  Kontaktpaare Typ I/II
- Je drei auswählen:  $\binom{2mn}{3} \in O(m^3n^3)$
- 4 mal vorkommen:  $O(m^3n^3)$

## Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke
- $2mn$  Kontaktpaare Typ I/II
- Je drei auswählen:  $\binom{2mn}{3} \in O(m^3n^3)$
- 4 mal vorkommen:  $O(m^3n^3)$
- Typ III und Typ I/II:  $O\left(\binom{mn}{2}\right)$



## Anzahl Krit. Platzierungen: Th. 2.31

- $|R| = m, \sum |P_i| = n$
- Ecke/Kante, Kante/Ecke, Ecke/Ecke
- $2mn$  Kontaktpaare Typ I/II
- Je drei auswählen:  $\binom{2mn}{3} \in O(m^3n^3)$
- 4 mal vorkommen:  $O(m^3n^3)$
- Typ III und Typ I/II:  $O(\binom{mn}{2})$
- Konvexität nicht genutzt

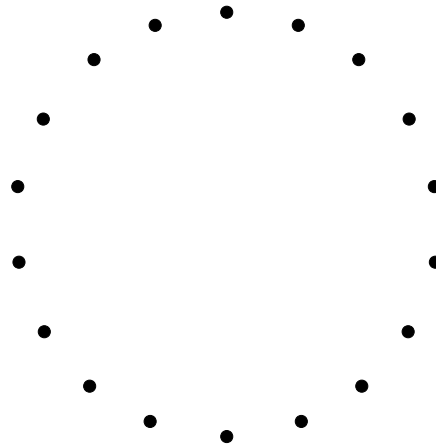
**Anzahl Krit. Platzierungen: Th. 2.31**

# Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

$\Omega(m^3n^3)$  konstruktiv:

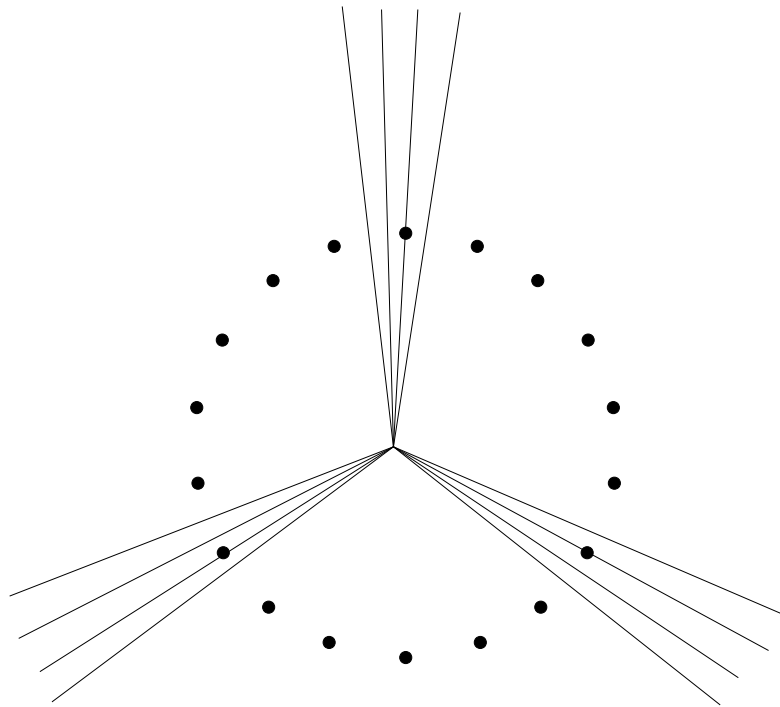
# Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

$\Omega(m^3 n^3)$  konstruktiv:  $\binom{m}{3}$  mal  $\binom{n}{3}$



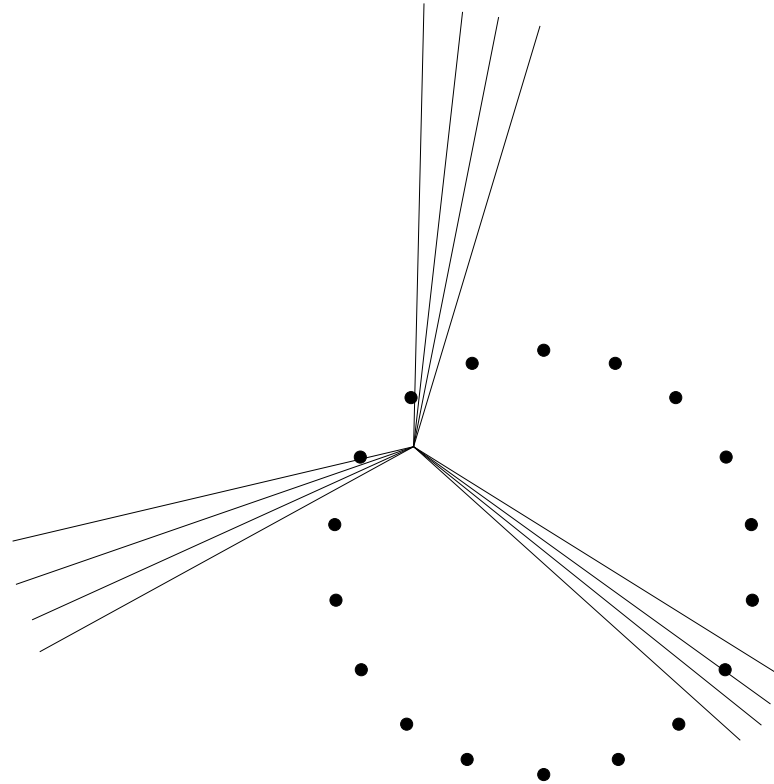
# Anzahl Krit. Platzierungen: **Th. 2.31**

$\Omega(m^3 n^3)$  konstruktiv:  $\binom{m}{3}$  mal  $\binom{n}{3}$



# Anzahl Krit. Platzierungen: Th. 2.31

$\Omega(m^3 n^3)$  konstruktiv:  $\binom{m}{3}$  mal  $\binom{n}{3}$



$R$  konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$



## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$  subquadratisch

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: **Th. 2.32**

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$  subquadratisch
- Davenport-Schinzel-Sequenzen

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: Th. 2.32

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$  subquadratisch
- Davenport-Schinzel-Sequenzen
- Wichtige Elemente für Bahnplanung

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: Th. 2.32

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$  subquadratisch
- Davenport-Schinzel-Sequenzen
- Wichtige Elemente für Bahnplanung
- Beweis Komplexität

## $R$ konvex! Krit. Platzierungen: Th. 2.32

- $|R| = m$  konvex,  $\sum |P_i| = n$
- Anzahl Kritische Platzierungen:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- $\lambda_6(mn) \in O(mn \log^*(mn))$  subquadratisch
- Davenport-Schinzel-Sequenzen
- Wichtige Elemente für Bahnplanung
- Beweis Komplexität
- Berechnen!

# Beschränken: Def. 2.33



## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt,

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile
- Bedingungen an das Paar von Kontaktpaaren

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile
- Bedingungen an das Paar von Kontaktpaaren
- Klassische Methode:

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile
- Bedingungen an das Paar von Kontaktpaaren
- Klassische Methode: weniger Paare als Tripel

## Beschränken: Def. 2.33

- Idee: Zwei Kontaktpaare auswählen, mit Kontakt, drittes Paar später dazu
- Kontakt lebt eine Weile
- Bedingungen an das Paar von Kontaktpaaren
- Klassische Methode: weniger Paare als Tripel
- Funktionen aufbauen

# Beschränken: Def. 2.33

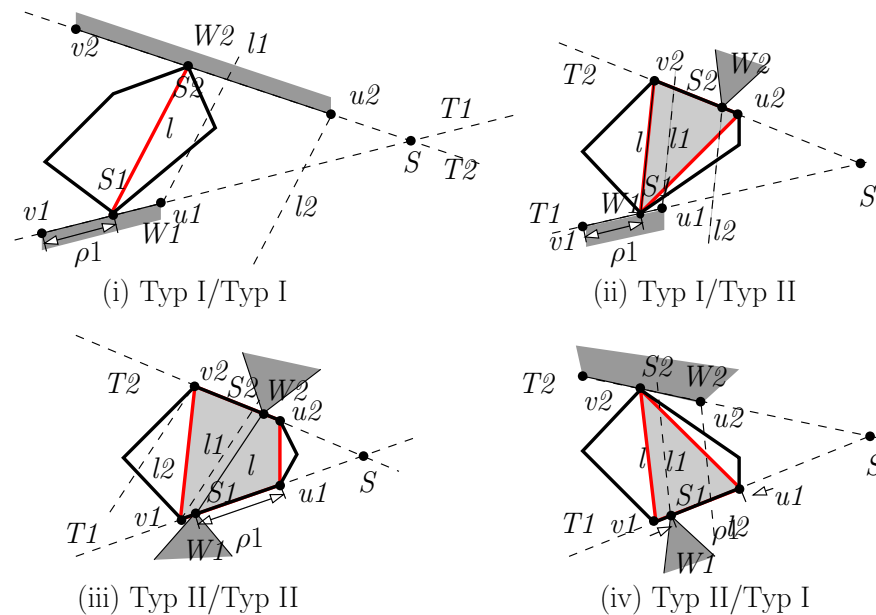


## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$

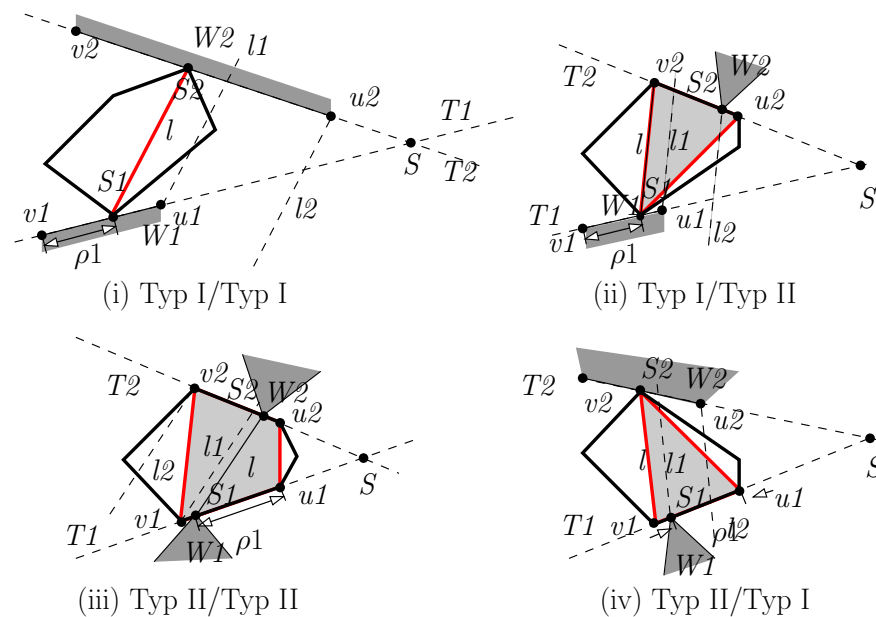
# Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten



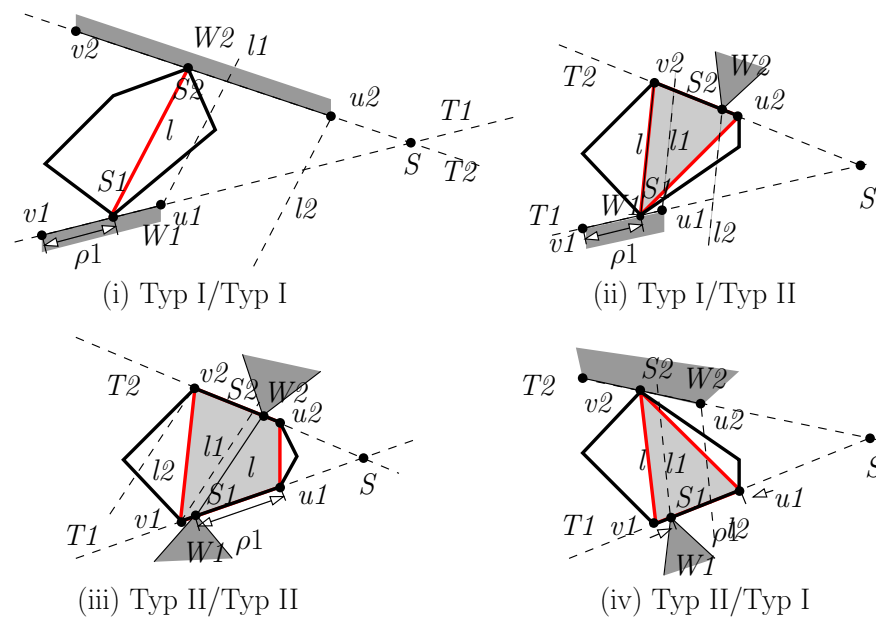
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!



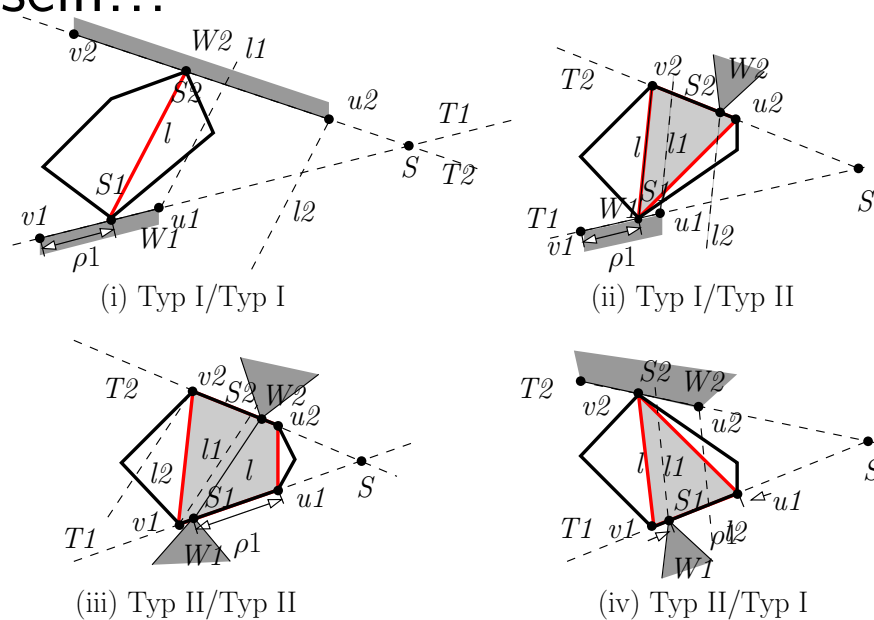
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke



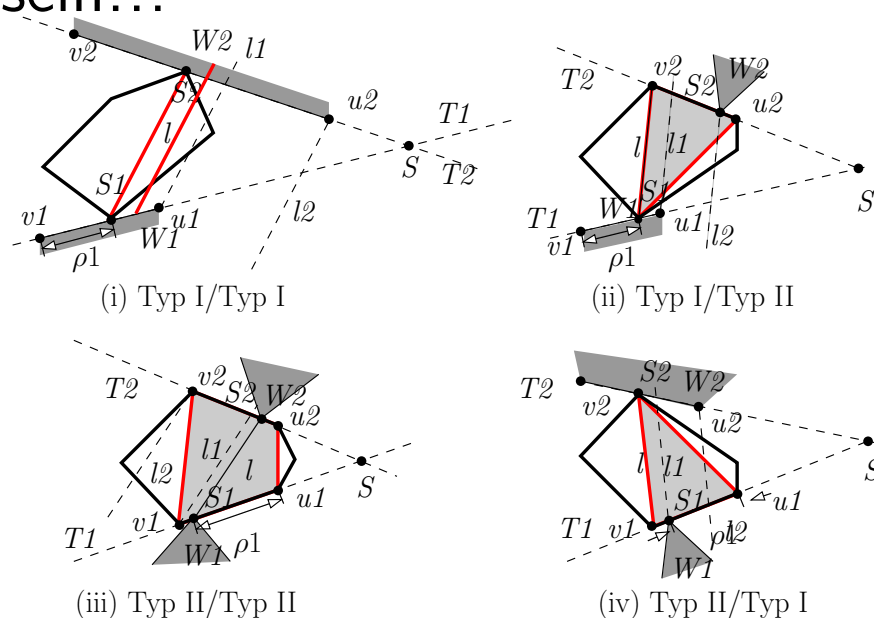
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



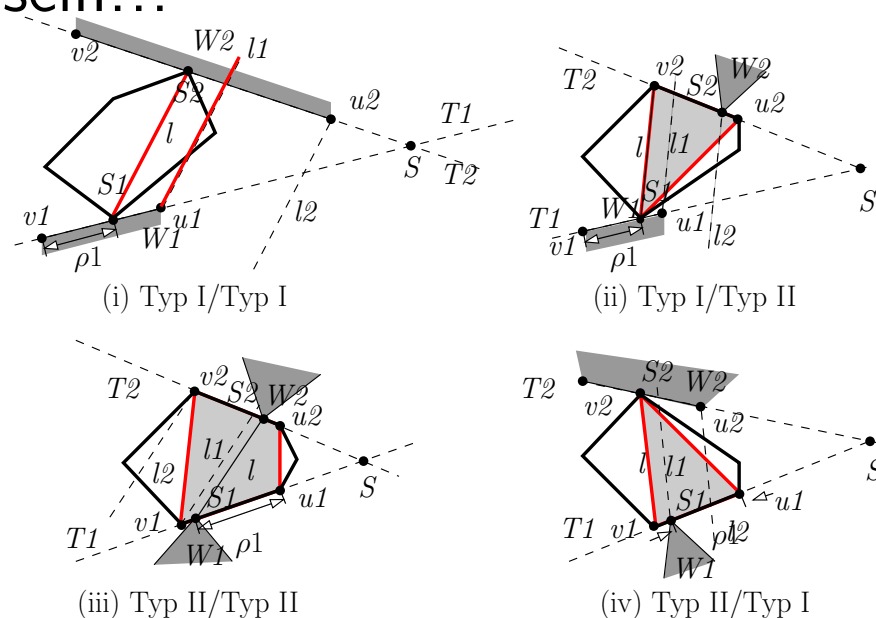
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



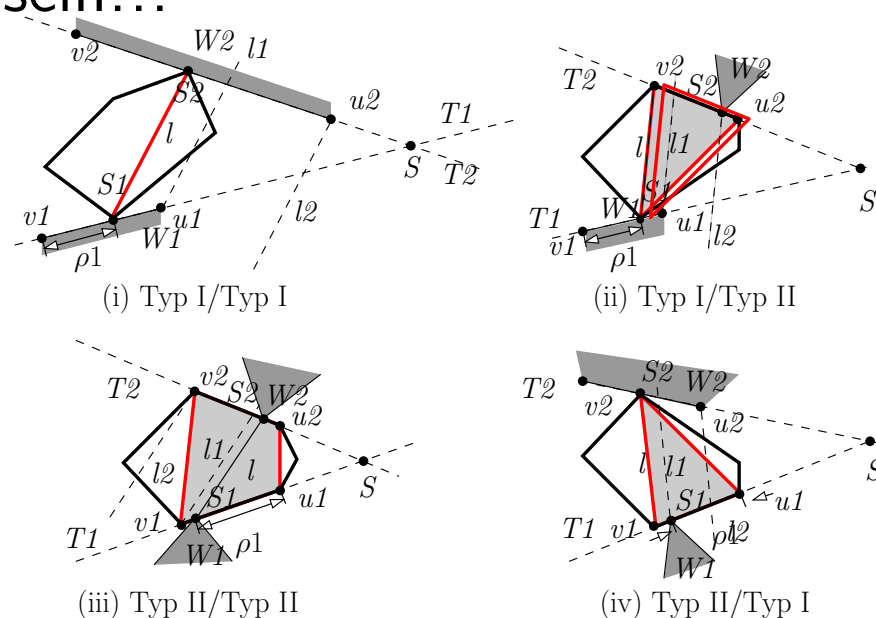
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



## Beschränken: Def. 2.33

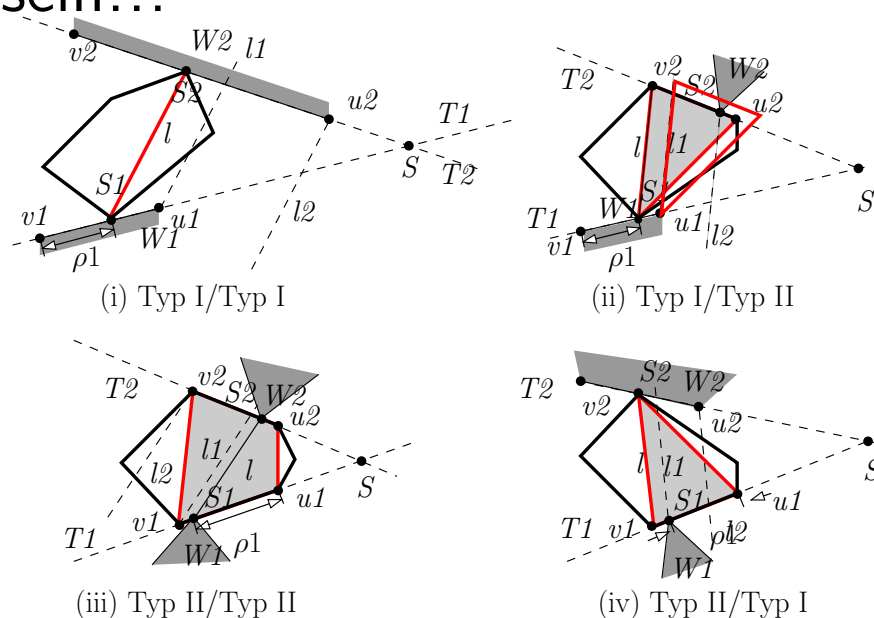
- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!





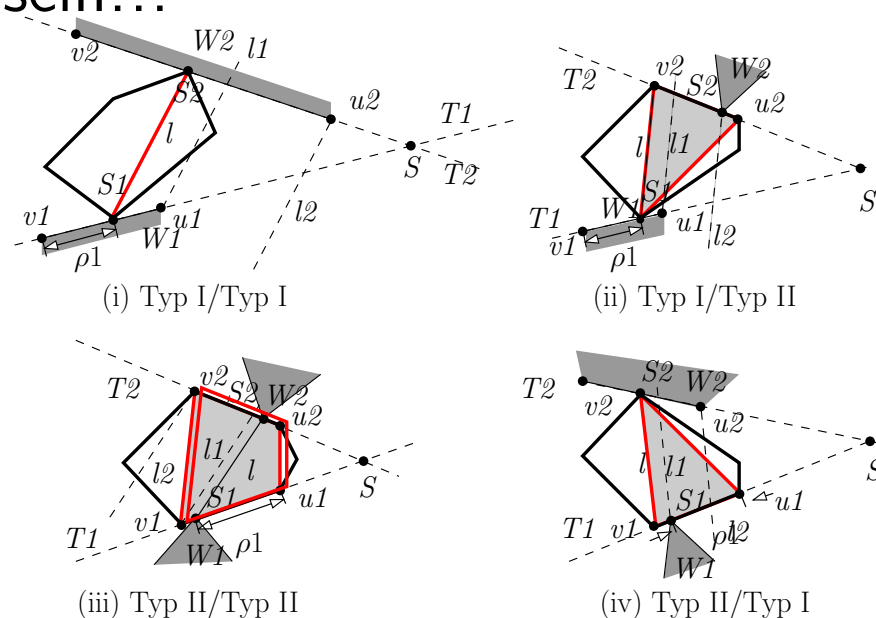
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



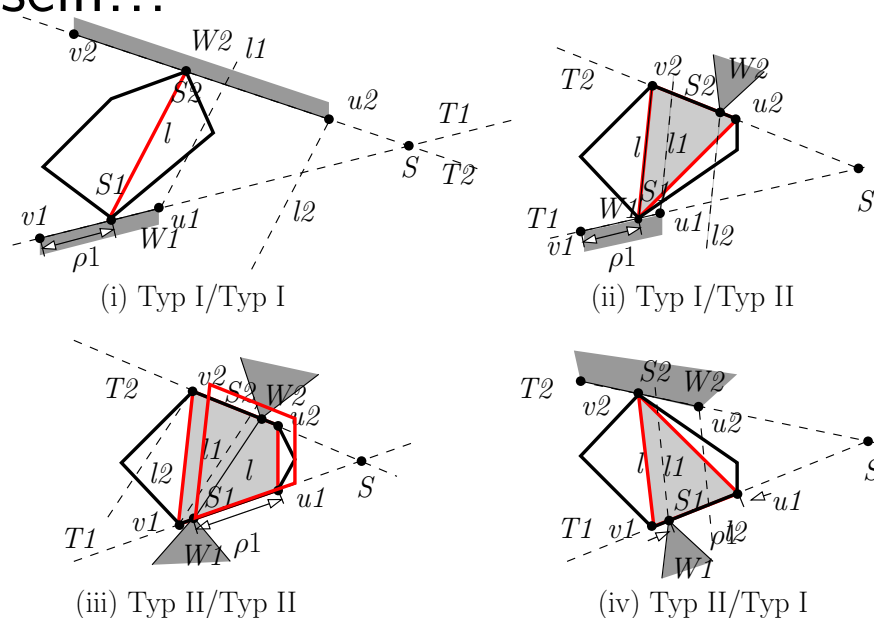
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



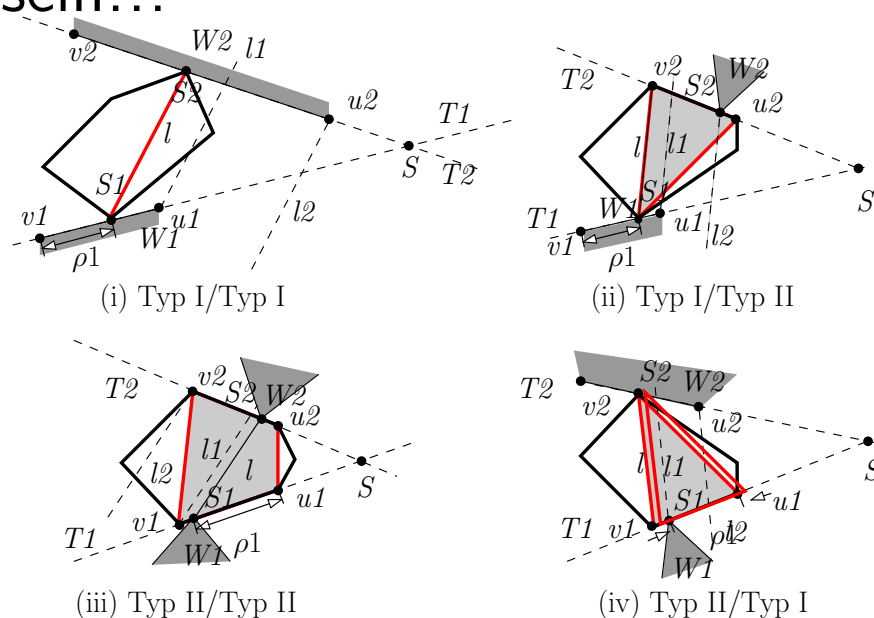
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



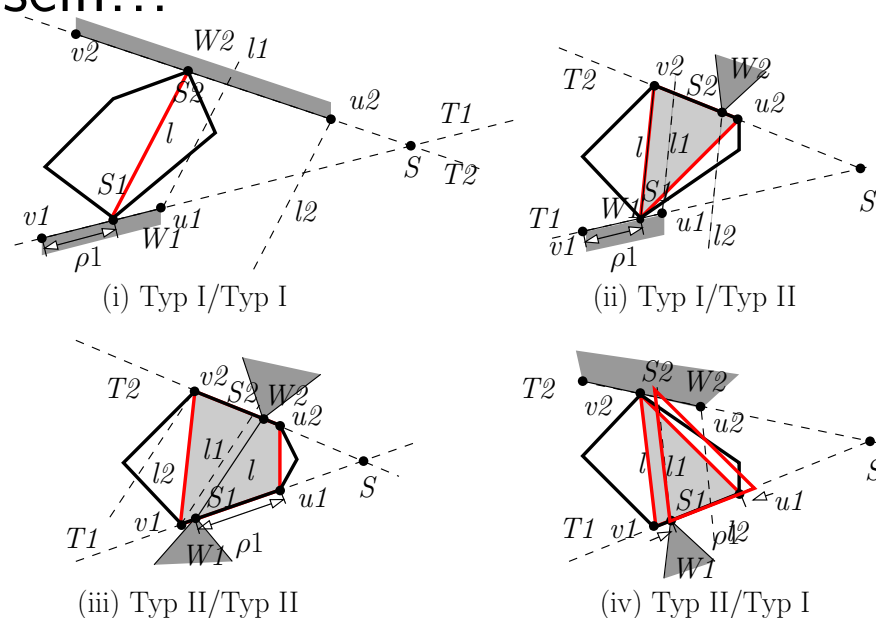
## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



## Beschränken: Def. 2.33

- Vier Fälle!:  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- $T_1, T_2$ : Verlängerungen der beteiligten Kanten
- Schnittpunkt  $s$ ,  $ch(S_1 \cup S_2)$ : Verschieben!
- Kontakt von  $ch(S_1 \cup S_2)$  mit  $W_2$  bleibt über gesamte Strecke
- Muss nicht frei sein!!!



# Beschränken: **Lem. 2.34**

## Beschränken: **Lem. 2.34**

- Kontaktpaare  $O_1 = (W_1, S_1)$ ,  $O_2 = (W_2, S_2)$

## Beschränken: **Lem. 2.34**

- Kontaktpaare  $O_1 = (W_1, S_1)$ ,  $O_2 = (W_2, S_2)$
- Kontakt bei  $\Theta$



## Beschränken: **Lem. 2.34**

- Kontaktpaare  $O_1 = (W_1, S_1)$ ,  $O_2 = (W_2, S_2)$
- Kontakt bei  $\Theta$
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder

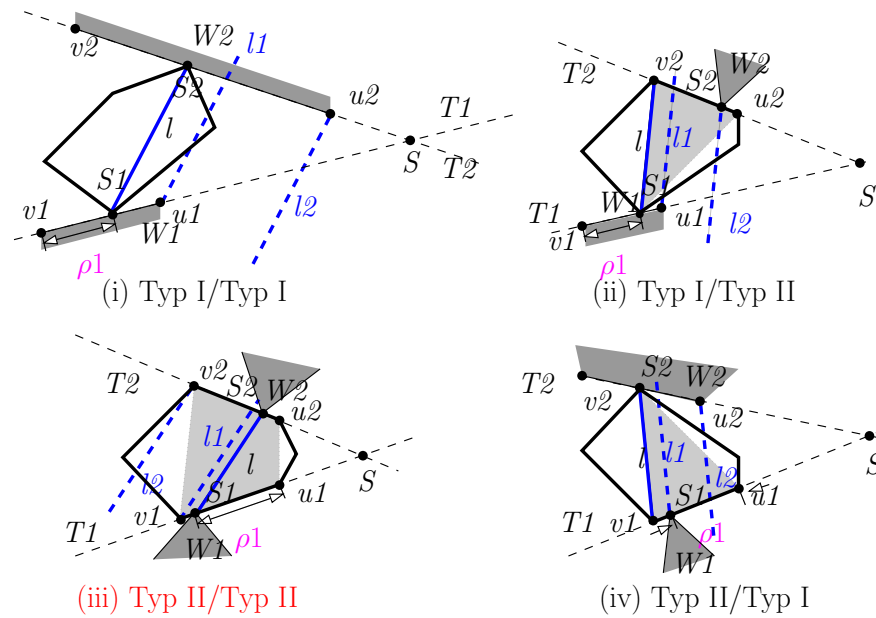
## Beschränken: **Lem. 2.34**

- Kontaktpaare  $O_1 = (W_1, S_1)$ ,  $O_2 = (W_2, S_2)$
- Kontakt bei  $\Theta$
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder
- $O_2$  beschränkt  $O_1$

## Beschränken: **Lem. 2.34**

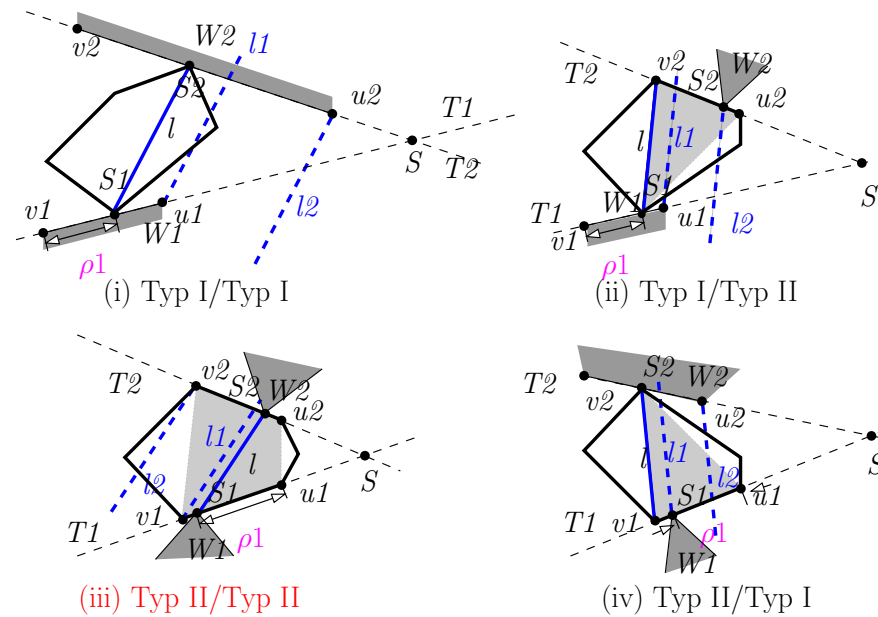
- Kontaktpaare  $O_1 = (W_1, S_1)$ ,  $O_2 = (W_2, S_2)$
- Kontakt bei  $\Theta$
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder
- $O_2$  beschränkt  $O_1$
- Beweis!!!

# Beweis: Lem. 2.34



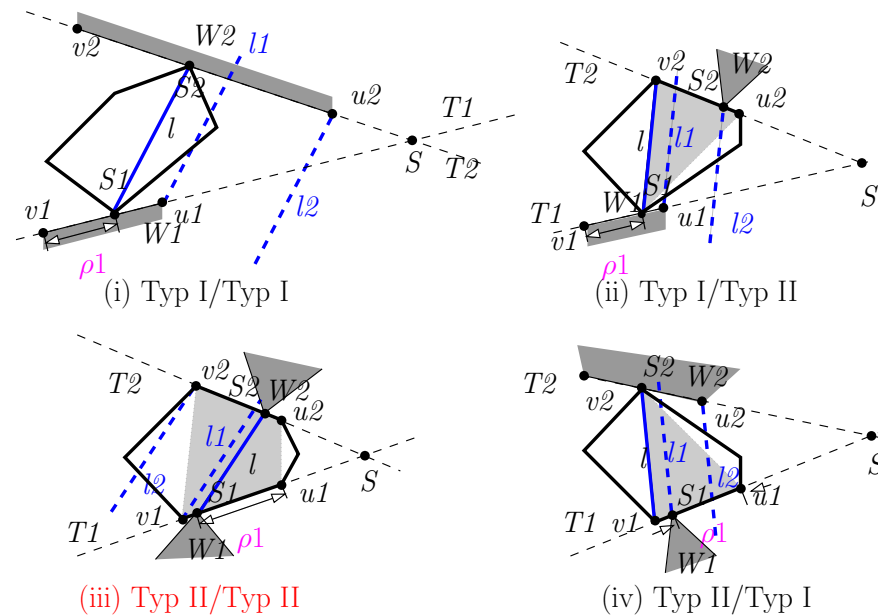
# Beweis: Lem. 2.34

- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder  $O_2$  beschränkt  $O_1$



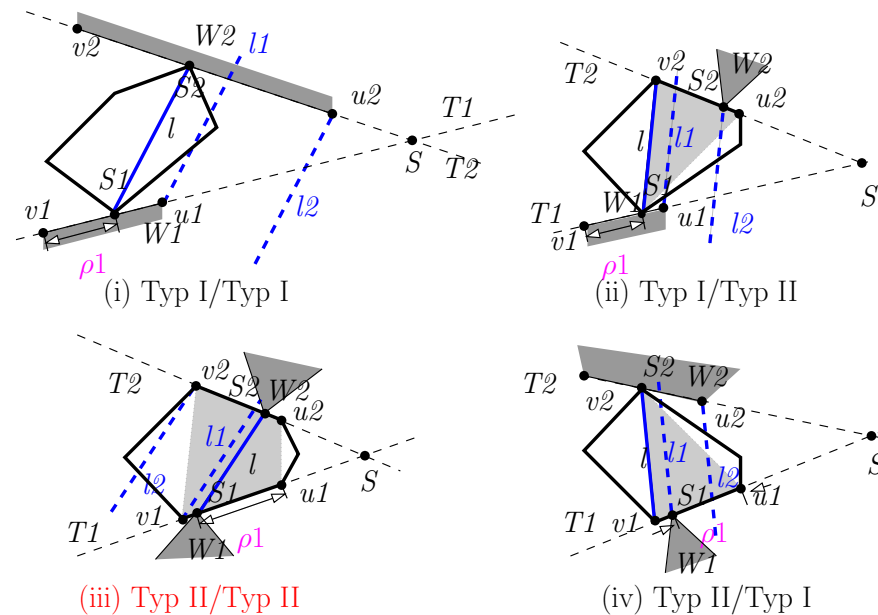
# Beweis: Lem. 2.34

- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder  $O_2$  beschränkt  $O_1$
- Fallunterscheidungen: Verschieben!



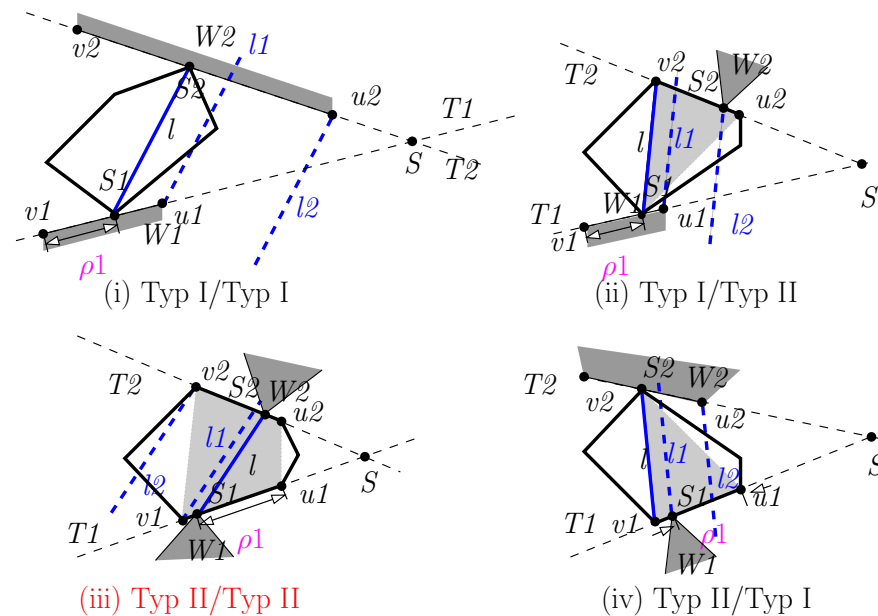
# Beweis: Lem. 2.34

- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder  $O_2$  beschränkt  $O_1$
- Fallunterscheidungen: Verschieben!
- Endpunkte  $v_1, v_2, u_1, u_2$  in Richtung  $s$



## Beweis: Lem. 2.34

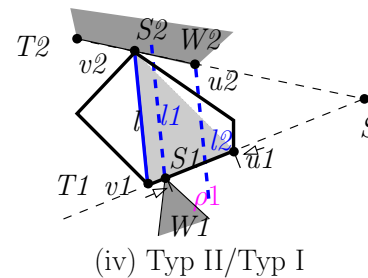
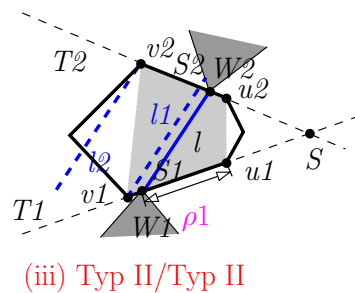
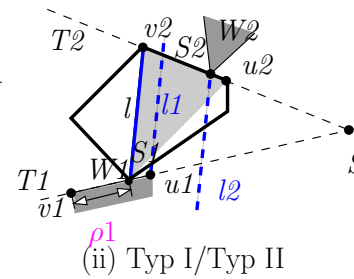
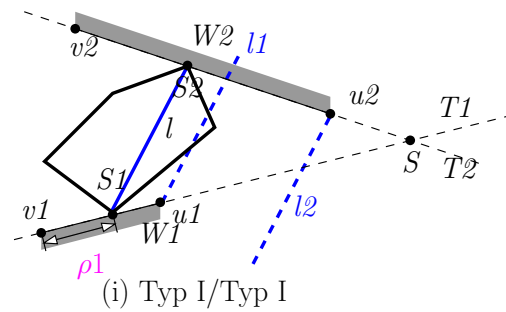
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder  $O_2$  beschränkt  $O_1$
- Fallunterscheidungen: Verschieben!
- Endpunkte  $v_1, v_2, u_1, u_2$  in Richtung  $s$
- i)  $l_1$  schneidet  $W_2$  oder  $l_2$  schneidet  $W_1$





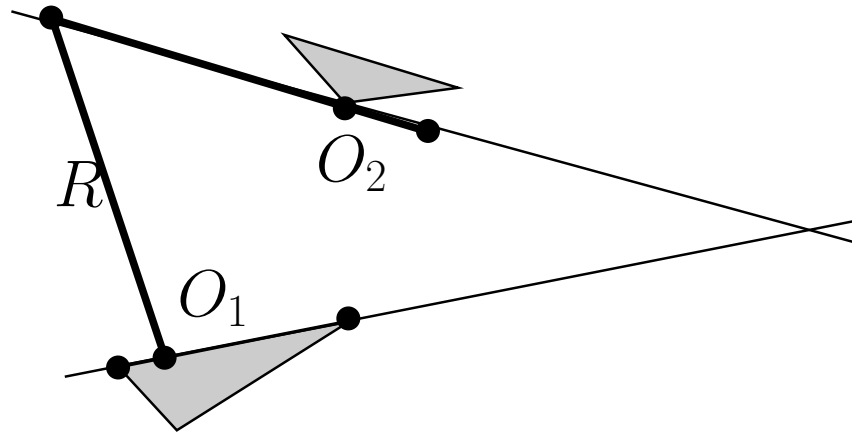
# Beweis: Lem. 2.34

- $O_1$  beschränkt  $O_2$  oder  $O_2$  beschränkt  $O_1$
- Fallunterscheidungen: Verschieben!
- Endpunkte  $v_1, v_2, u_1, u_2$  in Richtung  $s$
- i)  $l_1$  schneidet  $W_2$  oder  $l_2$  schneidet  $W_1$
- Funktionswert  $\rho$  für den Winkel!

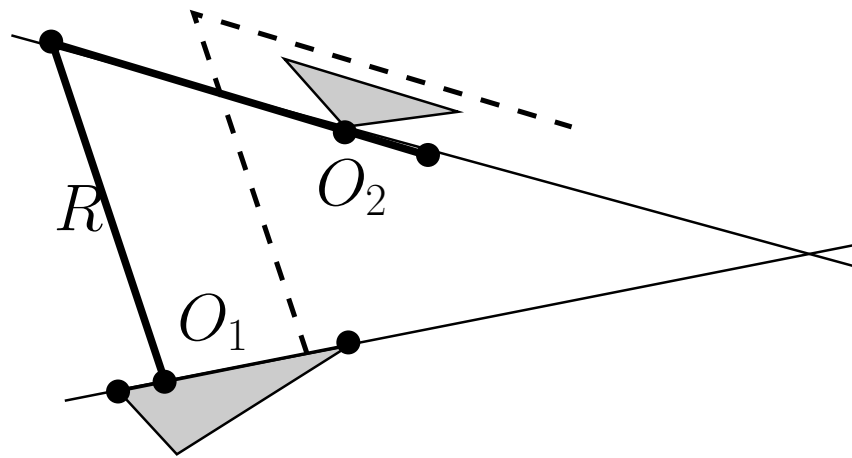


# Konvexität geht ein!!

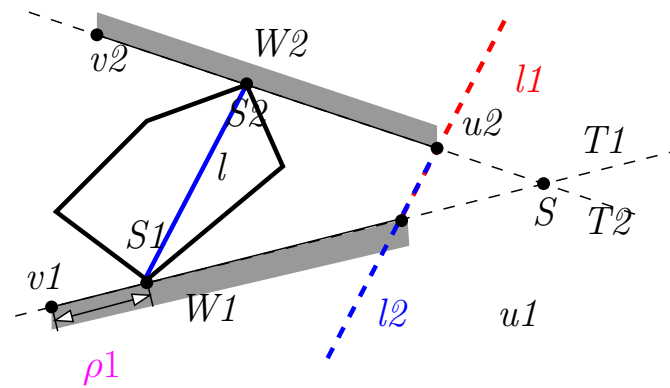
# Konvexität geht ein!!



# Konvexität geht ein!!



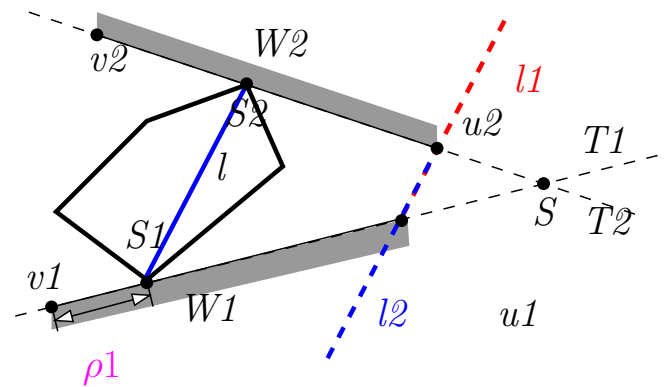
# Besonderheit: Bem. 2.35



(i) Typ I/Typ I

## Besonderheit: Bem. 2.35

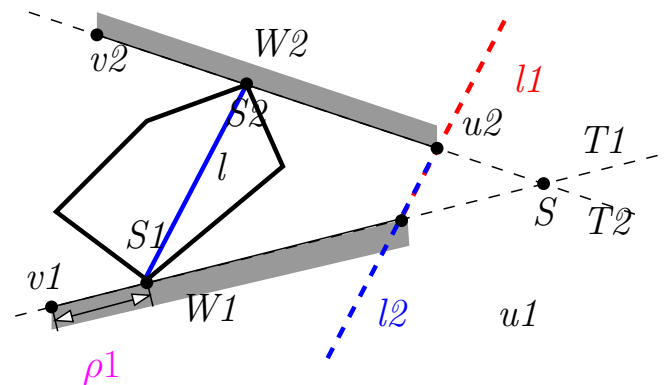
- Orientierung  $\Theta$  bei der die Aussage wechselt



(i) Typ I/Typ I

## Besonderheit: **Bem. 2.35**

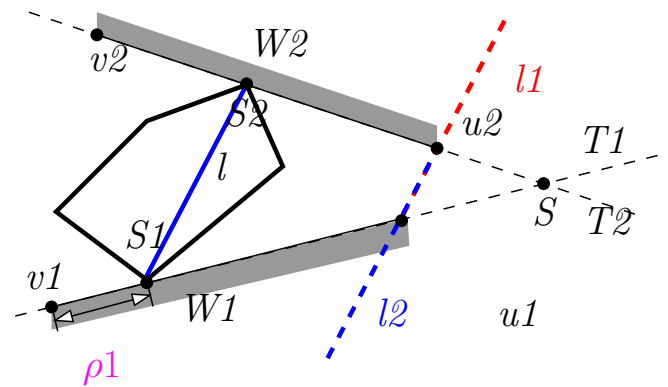
- Orientierung  $\Theta$  bei der die Aussage wechselt
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  **und**  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$



(i) Typ I/Typ I

## Besonderheit: **Bem. 2.35**

- Orientierung  $\Theta$  bei der die Aussage wechselt
- $O_1$  beschränkt  $O_2$  **und**  $O_2$  beschränkt  $O_1$  bei  $\Theta$
- Definition *Beschränken* leicht abwandeln



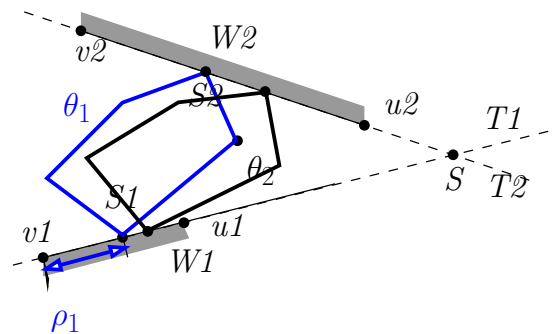
(i) Typ I/Typ I



# Funktionen und ihre Bedeutung

# Funktionen und ihre Bedeutung

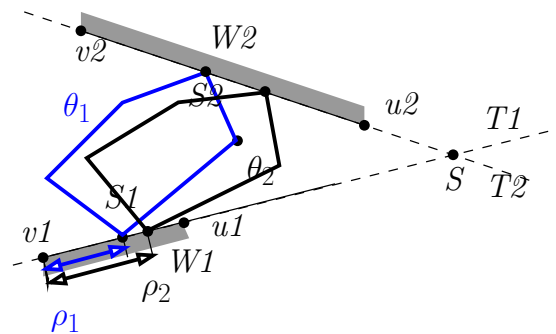
- Def.-bereich:  $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$ .



(i) Typ I/Typ I

# Funktionen und ihre Bedeutung

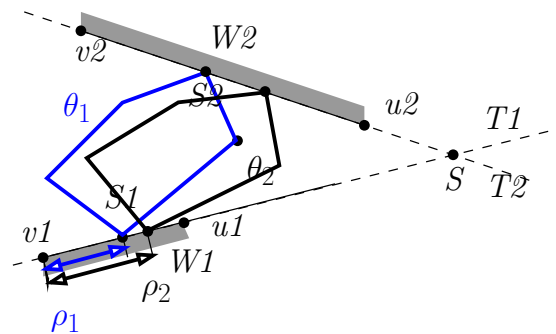
- Def.-bereich:  $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$ .
- Wert:  $\rho_i := \begin{cases} |\overline{x_i u_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterseite} \\ |\overline{v_i x_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterecke} \end{cases}$



(i) Typ I/Typ I

# Funktionen und ihre Bedeutung

- Def.-bereich:  $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$ .
- Wert:  $\rho_i := \begin{cases} |\overline{x_i u_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterseite} \\ |\overline{v_i x_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterecke} \end{cases}$
- Funktionen:



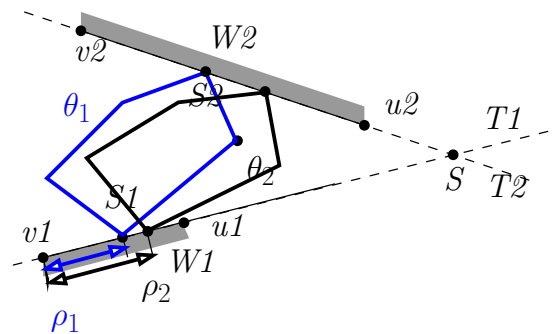
(i) Typ I/Typ I

# Funktionen und ihre Bedeutung

- Def.-bereich:  $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$ .
- Wert:  $\rho_i := \begin{cases} |\overline{x_i u_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterseite} \\ |\overline{v_i x_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterecke} \end{cases}$
- Funktionen:

$$f_{O_1 O_2} : \Pi_{O_1 O_2} \longrightarrow R^{>0}$$

$$\theta \longmapsto \rho_1$$



(i) Typ I/Typ I

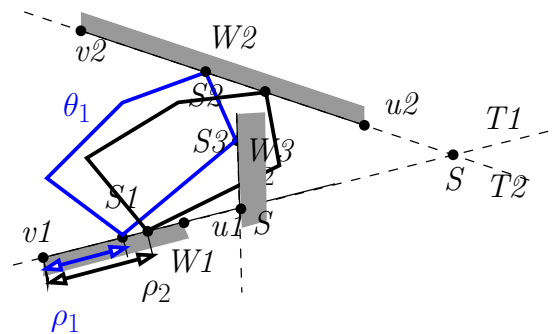
# Funktionen und ihre Bedeutung

- Def.-bereich:  $\Pi_{O_1 O_2} := \{ \theta | O_2 \text{ beschränkt } O_1 \text{ bei Winkel } \theta \}$ .
- Wert:  $\rho_i := \begin{cases} |\overline{x_i u_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterseite} \\ |\overline{v_i x_i}|, & \text{falls } S_i \text{ Roboterecke} \end{cases}$
- Funktionen:

$$f_{O_1 O_2} : \Pi_{O_1 O_2} \longrightarrow R^{>0}$$

$$\theta \longmapsto \rho_1$$

- Dritter Kontakt,  $O_3$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_1$ , Krit. Platzierung?

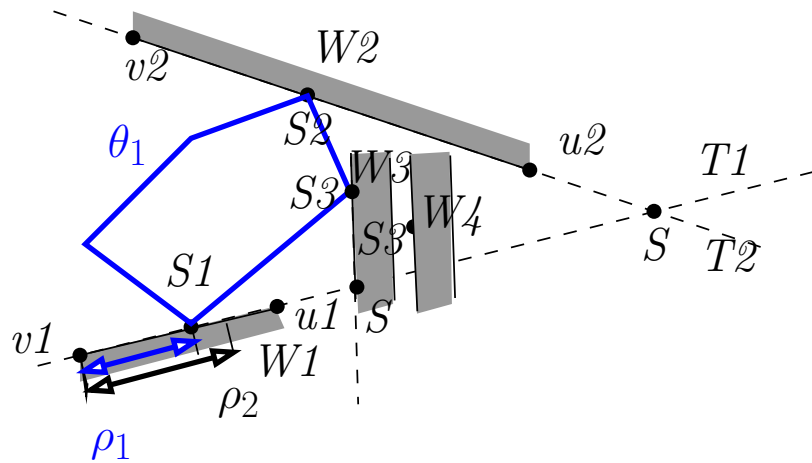


(i) Typ I/Typ I

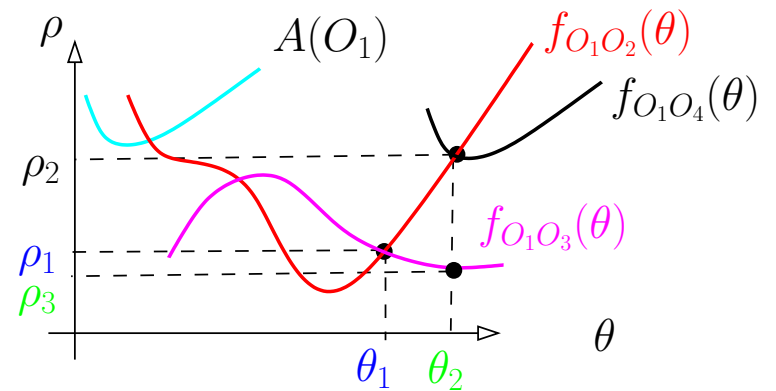
# Funktionen und ihre Bedeutung

# Funktionen und ihre Bedeutung

- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!



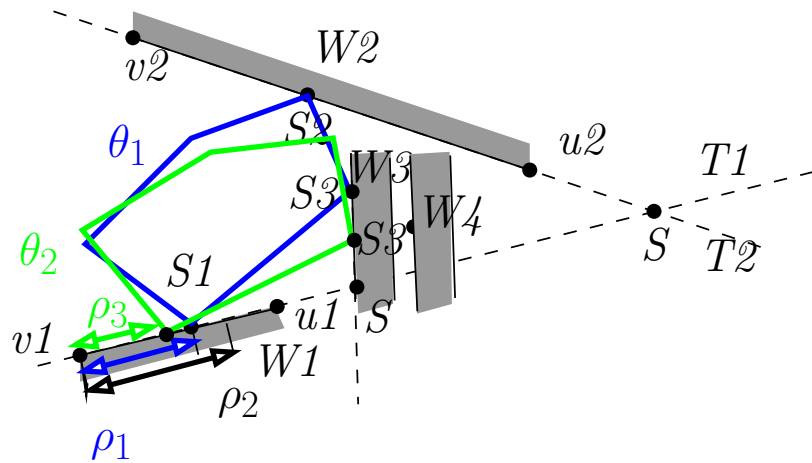
(i) Typ I/Typ I



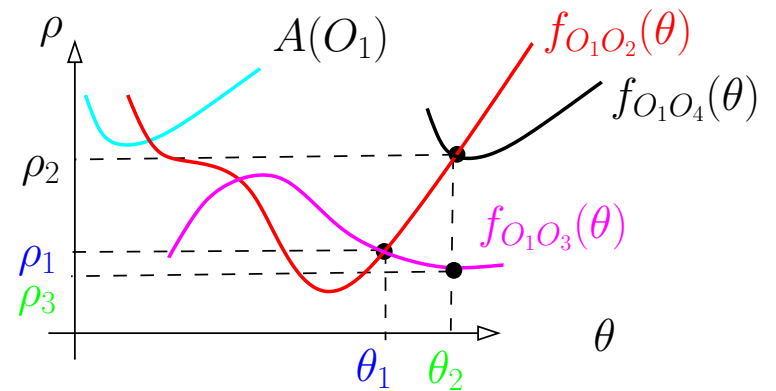


# Funktionen und ihre Bedeutung

- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!

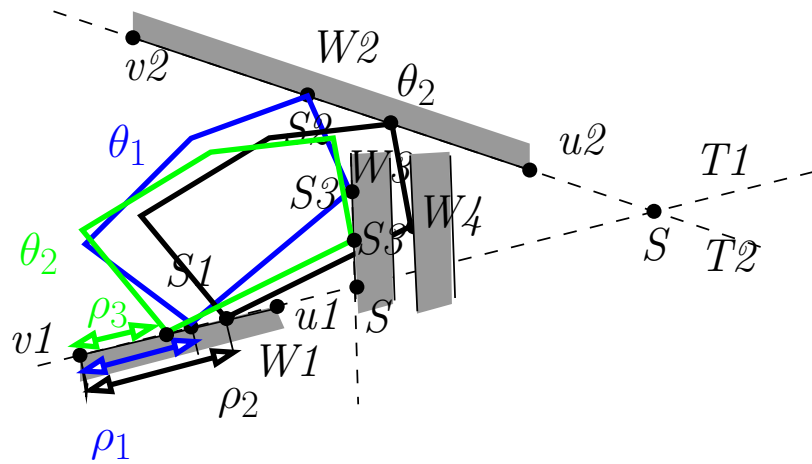


(i) Typ I/Typ I

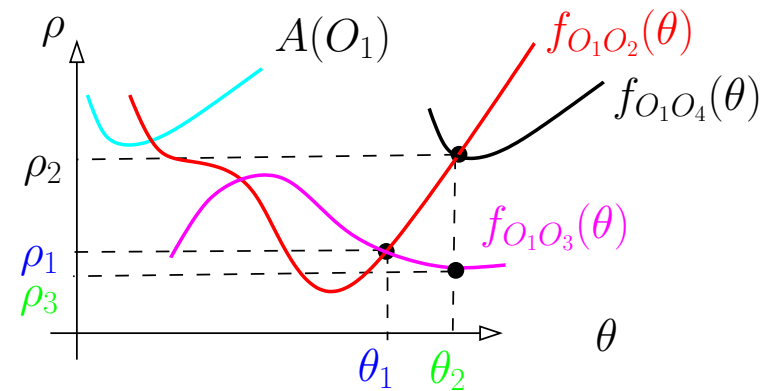


# Funktionen und ihre Bedeutung

- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!

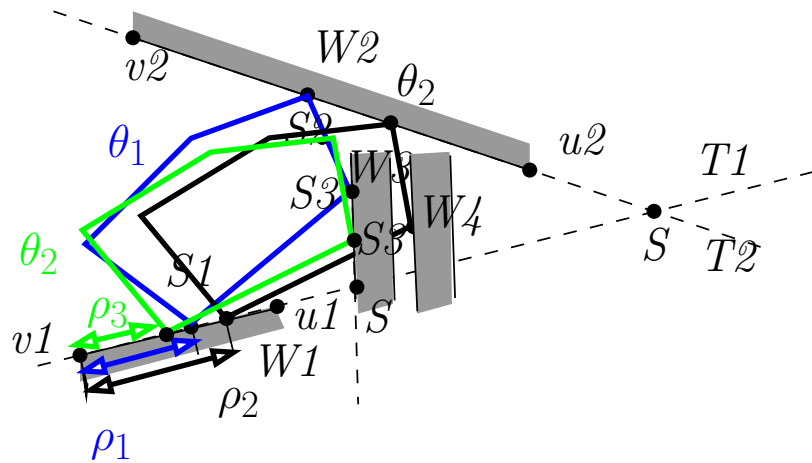


(i) Typ I/Typ I

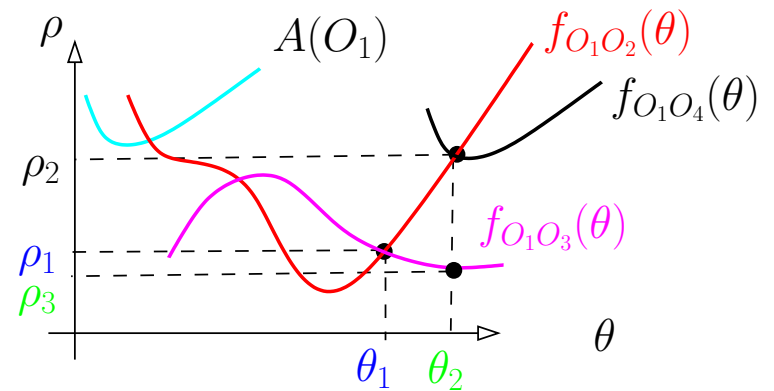


# Funktionen und ihre Bedeutung

- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!
- Arrangement:  $A(O_1)$ ,

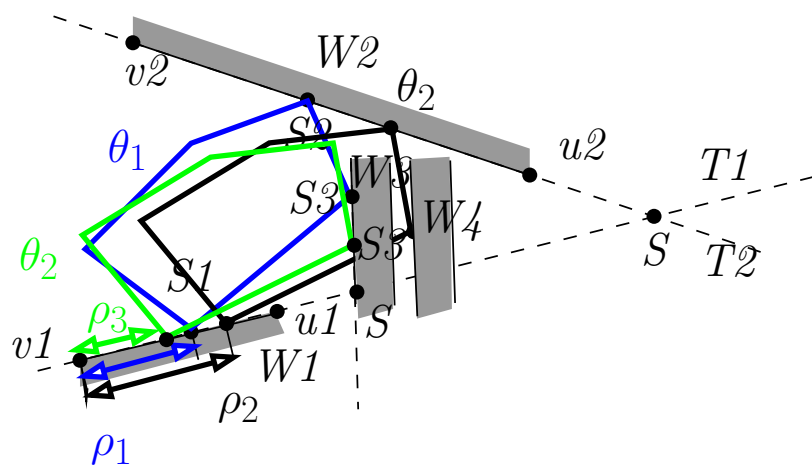


(i) Typ I/Typ I

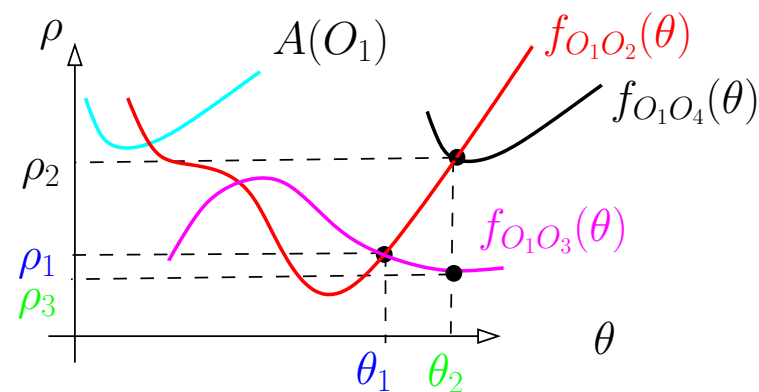


# Funktionen und ihre Bedeutung

- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!
- Arrangement:  $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1O_j}$ ,  $O_j$  beschränkt  $O_1$

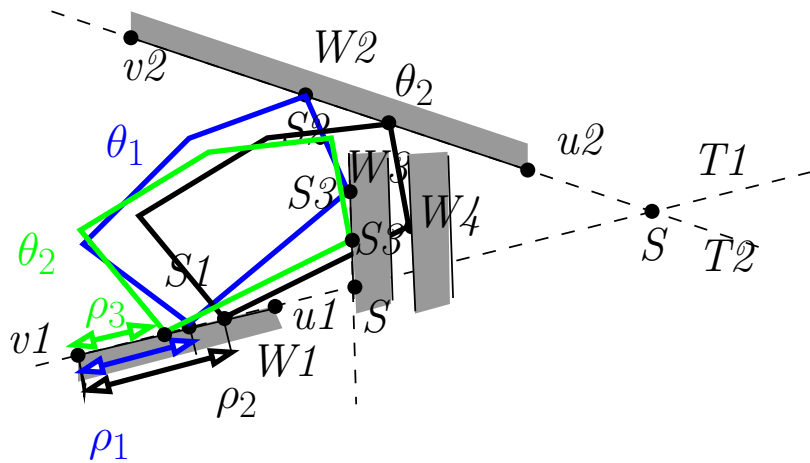


(i) Typ I/Typ I

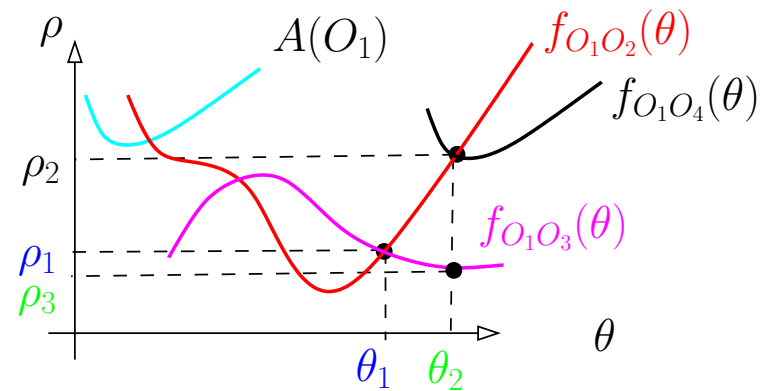


# Funktionen und ihre Bedeutung

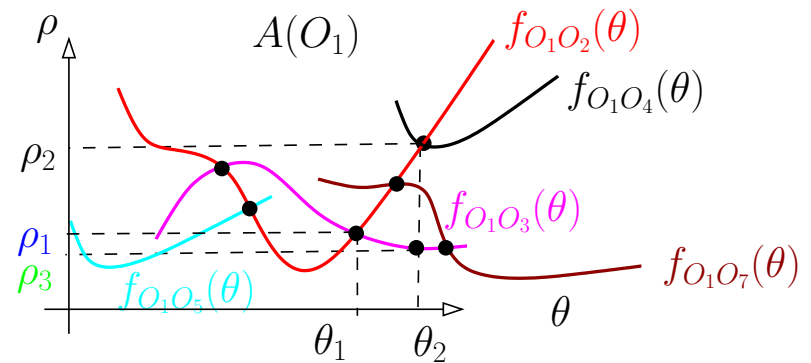
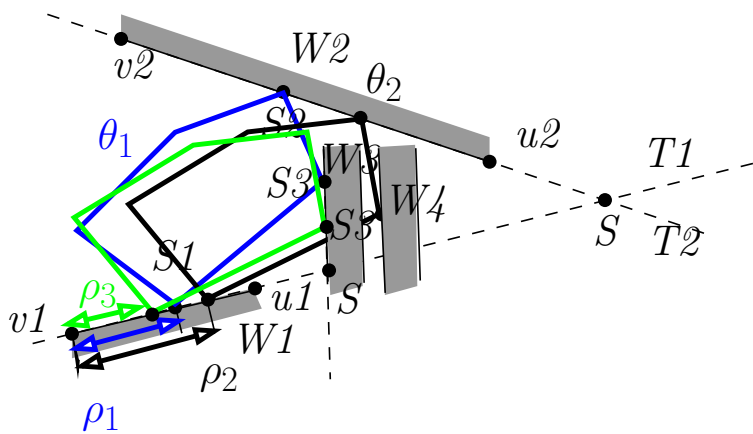
- $O_4$  beschränkt  $O_1$  bei  $\theta_2$ , keine Krit. Platzierung!!
- Arrangement:  $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1O_j}$ ,  $O_j$  beschränkt  $O_1$
- Nur untere Kontur des Arrangements ist entscheidend!!!



(i) Typ I/Typ I



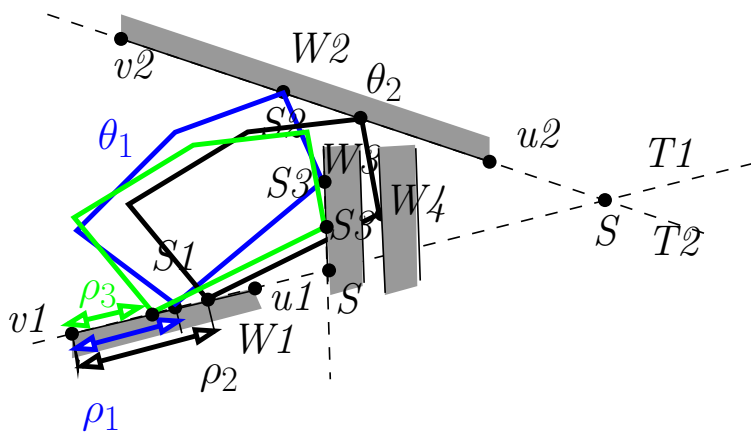
# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$



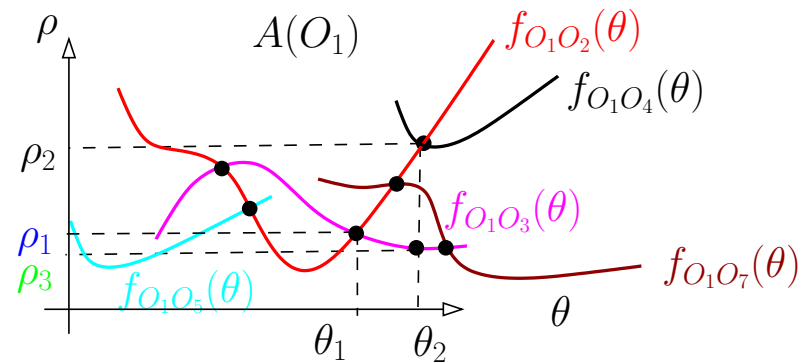
(i) Typ I/Typ I

# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung

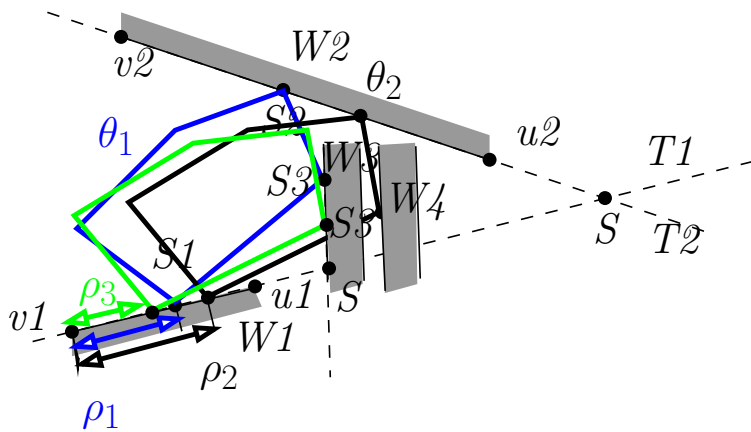


(i) Typ I/Typ I

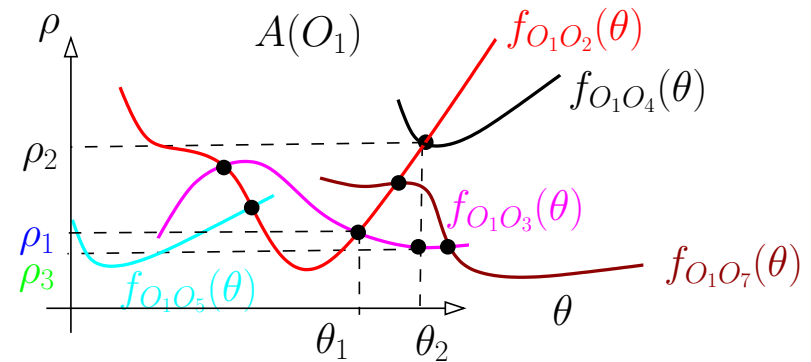


# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare  $O_1, O_2, O_3$



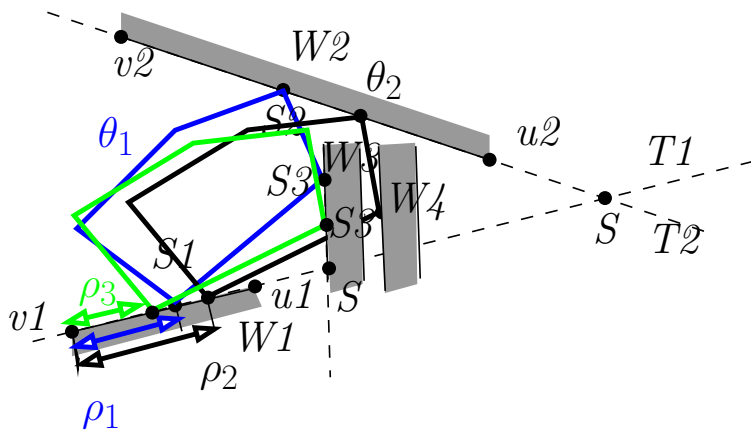
(i) Typ I/Typ I



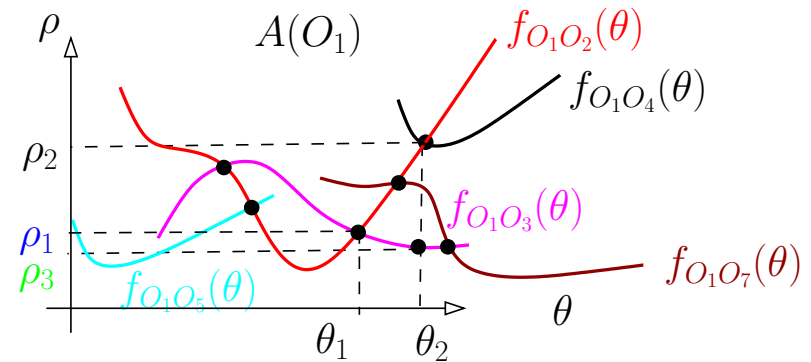


# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare  $O_1, O_2, O_3$
- **Fall 1:**  $O_2, O_3$  beschränken  $O_1$

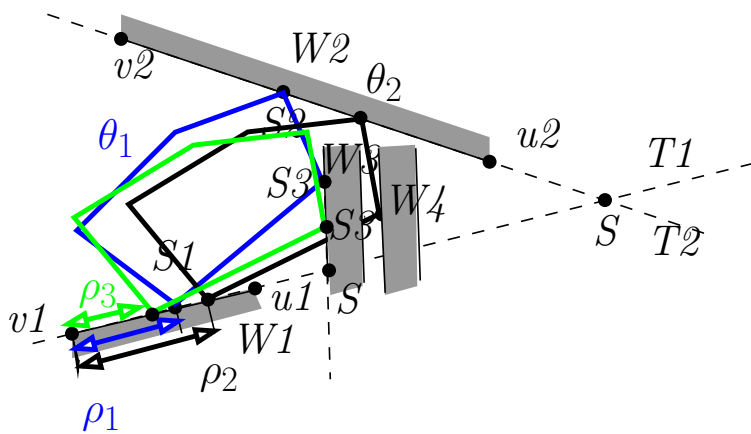


(i) Typ I/Typ I

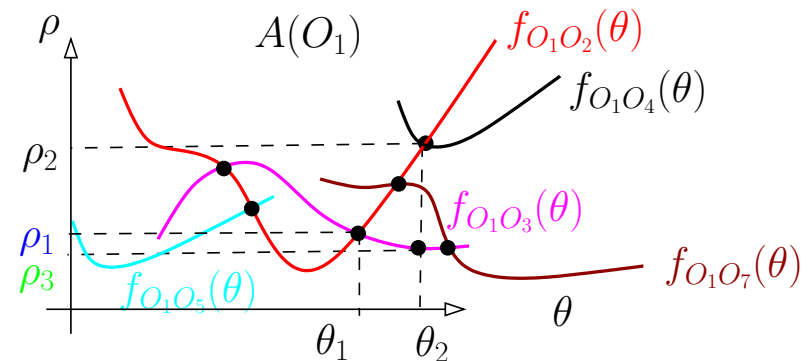


# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare  $O_1, O_2, O_3$
- **Fall 1:**  $O_2, O_3$  beschränken  $O_1$
- $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1 O_j}, O_j$  beschränkt  $O_1$

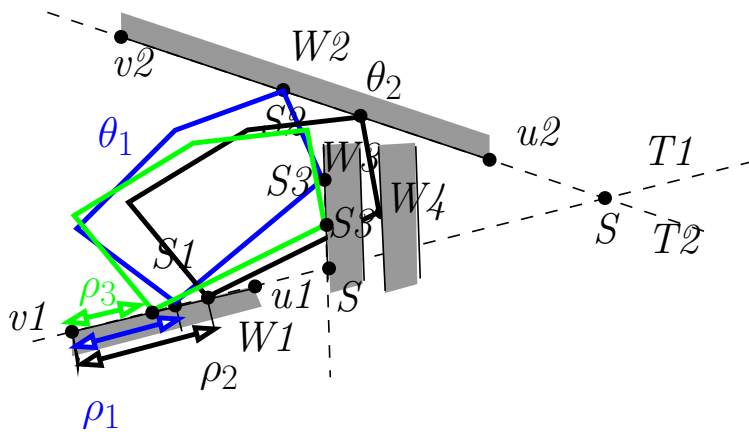


(i) Typ I/Typ I

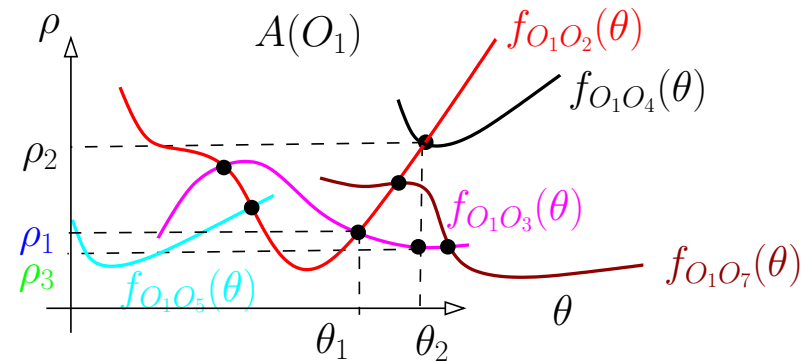


# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare  $O_1, O_2, O_3$
- **Fall 1:**  $O_2, O_3$  beschränken  $O_1$
- $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1 O_j}, O_j$  beschränkt  $O_1$
- Schnittknoten zählen!!

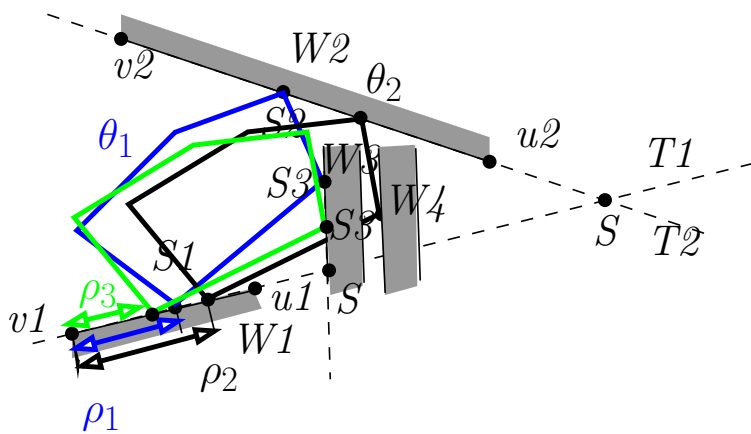


(i) Typ I/Typ I

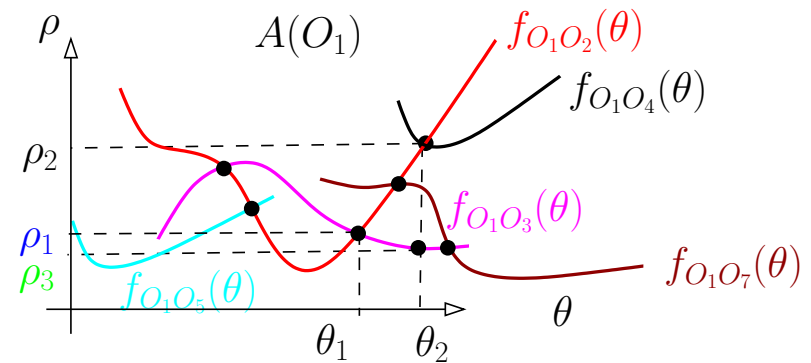


# Beweis: Krit. Platz in $O(mn \lambda_6(mn))$

- $(x, y, \theta)$  Kritische Platzierung
- Nur den Fall: Drei Kontaktpaare  $O_1, O_2, O_3$
- **Fall 1:**  $O_2, O_3$  beschränken  $O_1$
- $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1 O_j}, O_j$  beschränkt  $O_1$
- Schnittknoten zählen!! Nur die der unteren Kontur!



(i) Typ I/Typ I



# Fall 1: Argumentation gilt stets!!

- Arrangement  $A(O_1)$ , alle Funktionen  $f_{O_1 O_j}$ ,  $O_j$  beschränkt  $O_1$
- Schnittknoten zählen!! Nur die der unteren Kontur!

