Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 7
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 25.11.2014, bis 10:15 Uhr　　　　Besprechung: KW 49

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Aufgabe 1:　　Binomischer Lehrsatz　　　　2+2 Punkte

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die letzten 5 Stellen in der Dezimaldarstellung von 1001^{20}.

b) Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Nach dem binomischen Lehrsatz handelt es sich bei $p : x \mapsto (1+x)^{n+1}$ um ein Polynom vom Grad $n+1$ in der Variablen x. Entsprechend ist auch $q : x \mapsto (1+x)^{n-1}$ ein Polynom in der Variablen x.

Sei p_4 der Koeffizienten von x^4 im Polynom p und sei q_2 der Koeffizient von x^2 im Polynom q.

Wenn $p_4 = 6q_2$ gilt, welchen Wert muss dann n besitzen?

Aufgabe 2:　　Vollständige Induktion　　　　4 Punkte

Zeigen Sie mittels vollst. Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Ergebnisse

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ und } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Aufgabe 3: **Kombinatorik** 1+1,5+1,5 Punkte

Wir betrachten ein Gitter $G = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ mit $m, n \geq 20$. Wir starten in Punkt $(1, 1)$ und wollen uns in G bewegen. Zu jedem Zeitpunkt dürfen wir uns einen Schritt in x-Richtung (von (x, y) nach $(x + 1, y)$) oder einen Schritt in y-Richtung (von (x, y) nach $(x, y + 1)$) bewegen, sofern wir G nicht verlassen.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen, ohne über Punkt $(10, 10)$ zu laufen?

c) Wie viele mögliche Wege gibt es, die in einem Punkt (x, y) mit $y = n$ enden und die keinen weiteren Punkt (x', y') mit $y' = n$ enthalten?

Aufgabe 4: **Wahrscheinlichkeiten** 1+1+2 Punkte

Betrachten Sie das klassiche Poker-Spiel *(Five Card Draw)* mit 52 Karten, bei dem jedem Spieler 5 Karten ausgeteilt werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein Spieler nach dem Austeilen einen Vierling hat.

b) ein Spieler nach dem Austeilen einen Flush (5 Karten einer Spielfarbe) hat.

c) ein Spieler mindestens 3 Asse hat, wenn er nach dem Austeilen mindestens ein Ass hatte und alle Karten außer der Asse ablegen und neu ziehen durfte.

Aufgabe 5: **Strukturelle Induktion** 4 Zusatzpunkte

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Für ein Wort $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $w^R = w_n w_{n-1} \ldots w_2 w_1$ die Spiegelung von w. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion über reguläre Ausdrücke, dass dann auch die Sprache $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ regulär ist.

Hinweis: Definieren Sie zunächst rekursiv eine Funktion f, die jedem regulären Ausdruck R einen regulären Ausdruck $f(R)$ mit $L(f(R)) = \{w^R \mid w \in L(R)\}$ zuweist.