

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

6 Punkte

Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende ungerichtete gewichtete Graph mit positiven Kantengewichten eine Metrik auf seinen Knoten induziert. Zeigen Sie umgekehrt, dass jeder endliche metrische Raum durch einen zusammenhängenden ungerichteten gewichteten Graphen mit positiven Kantengewichten dargestellt werden kann.

Aufgabe 4.2

6 Punkte

Geben Sie einen optimalen Offline-Algorithmus für das k -Server-Problem an, der auf dynamischer Programmierung basiert. Welche Laufzeit besitzt Ihr Algorithmus?

Aufgabe 4.3

6 Punkte

Ein hyperaktiver Affe sitzt vor einer Tastatur mit den Zeichen „A“ bis „Z“ und tippt wahllos 1.000.000 Zeichen ein. Wir nehmen an, dass jedes der eingetippten Zeichen uniform zufällig und unabhängig von den anderen eingetippten Zeichen ausgewählt wurde. Wie oft taucht das Wort „BANANE“ in dieser Sequenz im Erwartungswert auf?

Aufgabe 4.4

6 Punkte

Als Zeichen seines guten Willens lässt ein Gefängnisdirektor an seinem Geburtstag die Insassen mit den Nummern 1 bis 100, die wegen geistiger Untätigkeit zu einer Woche Dauerarrest verurteilt wurden, zu sich bringen und schlägt ihnen folgendes Spiel vor: In einem Raum befinden sich 100 geschlossene Boxen, die jeweils eine der Zahlen 1 bis 100 enthalten. Diese wurden gemäß einer zufälligen Permutation von $1, \dots, 100$ den Boxen zugeordnet, wobei jede Permutation gleichwahrscheinlich war. Die Gefangenen sollen nun nacheinander den Raum betreten, je 50 Boxen öffnen, anschließend alle Boxen wieder verschließen und den Raum verlassen. Es dürfen nie zwei Gefangene gleichzeitig im Raum sein. Wenn jeder Insasse seine eigene Nummer gefunden hat, werden alle Insassen frühzeitig entlassen. Ansonsten muss jeder seinen Arrest absitzen.

Die Gefangenen dürfen sich, bevor der erste den Raum betritt, auf eine gemeinsame Strategie einigen. Anschließend dürfen keine Informationen mehr ausgetauscht werden. Geben Sie eine Strategie an, mit der die Gefangenen mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \ln 2 \approx 0.31$ freikommen.