

Offline Bewegungsplanung: ZAZ und Kantengraph

Elmar Langetepe
University of Bonn

Kap. 3.4: Anwendung auf die Bahnplanung

Theorem 3.11: Das Problem der Bewegungsplanung für allgemeine Systeme ist effektiv berechenbar!■

- C_{frei} als semialgebraische Menge■
- Entscheidungsproblem: Start- und Endkonfiguration■
- Existiert kollisionsfreier Weg■
- Berechne den Pfad■
- Algorithmus existiert■
- In endlicher Zeit Antwort der Maschine■

Beweis Theorem 3.11 (beispielhaft)

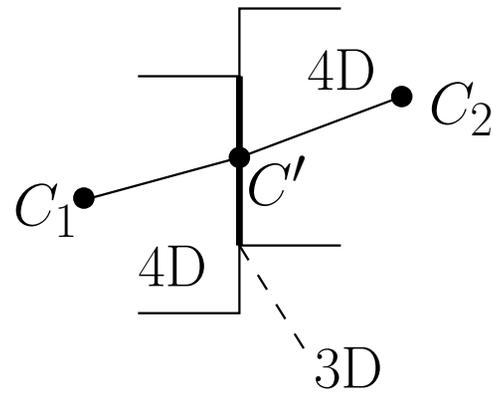
- Vereinfacht!
- $C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2) := \exists X_1, X_2, X'_1, X'_2 \left(R(X_1, X_2) \wedge H(X'_1, X'_2) \wedge B(X_1, X_2, X'_1, X'_2, A_1, A_2, S_1, S_2) \right)$
- Eliminieren der Quantoren, Theorem 3.6
- ZAZ $(\mathcal{K}_8, \sigma_8)$ für Polynome aus R, H und B
- $C_{\text{verb}}(A_1, A_2, S_1, S_2) \equiv \mathcal{B}(A_1, A_2, S_1, S_2)$, \mathcal{B} quantorenfrei
- Alle lokal verbotenen Bewegungen! Agent fest!
- ZAZ $(\mathcal{K}_4, \sigma_4)$ für alle Polynome aus \mathcal{B}
- $\mathcal{K}_{\text{frei}}$ Menge der Zellen aus $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1$ mit $C \subseteq C_{\text{frei}}$
- Endpunkt erreichbar! Freie Bewegung dazwischen?

ZAZ (\mathcal{K}_4, σ_4)

- $\mathcal{K}_{\text{frei}}$ Menge der Zellen C aus $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1$ mit $C \subseteq C_{\text{frei}}$,
effektiv testen, Probepunkte
- Hier Annahme: C_{frei} echt offen, keine dünnen Stellen
- Translation bei fester Drehung, zweidimensionale Zelle
- Geht auch immer mit Drehung
- Die drei und vierdimensionalen Zellen reichen aus
- Zusammenhangsgraph der Zellen 3- und 4-dimensionalen Zellen aus $\mathcal{K}_{\text{frei}}$
- Genaue Definition

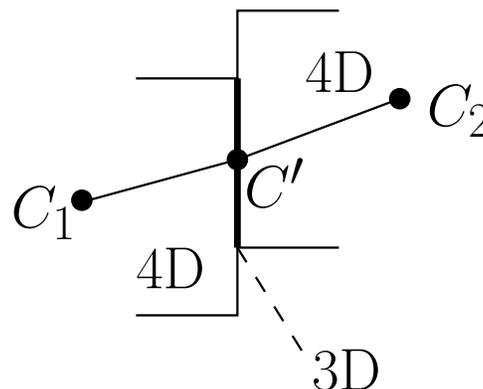
ZAZ (\mathcal{K}_4, σ_4)

- Def. *Wohl basierte Zerlegung*: Abschluss einer Zelle C in \mathcal{K}_l ist Vereinigung von Zellen aus $\mathcal{K}_j, j \in [1, l]$
- Gilt offensichtlich für ZAZ
- Def. *Adjazent*: Zellen C und C' gdw.
 1. C ist m dimensional, C' $m - 1$ dimensional
 2. $C' \subset \partial C$ (Rand von C)
- *Zusammenhangsgraph*:
 1. Knoten Zellen aus $\mathcal{K}_{\text{frei}}$
 2. Kante falls C und C' adjazent sind



Zusammenhangsgraph von $\mathcal{K}_{\text{frei}}$

- Entscheiden ob C und C' adjazent sind■
- C m -dim., C' $m - 1$ -dim■
- C wird durch $\alpha_C(x)$, C' wird durch $\alpha_{C'}(x)$ beschrieben■
- $\alpha_C(x)$ und $\alpha_{C'}(x)$ quantorenfrei■
- Adjazenz entspricht: Tarski-Ausdruck entscheiden■
- $\forall \varepsilon \forall q' \exists q : (\alpha_{C'}(q') \wedge \varepsilon > 0 \rightarrow \alpha_C(q) \wedge |q - q'| < \varepsilon)$ ■
- ZAZ für Polynome in Ausdruck, ■ dann Adjazenz effektiv prüfen■



Bahnplanung mit Zs.-hangsgraph

- Ziel $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ und Start $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ ■
 1. Bestimme C_s und C_t durch Einsetzen in alle $\alpha_C(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ■
 2. Breitensuche im Zs.-hangsgraph von C_s nach C_t ■
- Folge von Zelle in $\mathcal{K}_{\text{frei}}$: $C_s = C_1, C_2, C_3, \dots, C_{2p+1} = C_t$ ■
- C_{2i+1} , $0 \leq i \leq p$ hat Dimension 4,
 C_{2i} , $0 \leq i \leq p$ hat Dimension ≤ 3 ,
 C_{2i+1} ist zu C_{2i+2} benachbart ($0 \leq i \leq p - 1$), C_{2p} zu C_{2p+1} ■
- $C_{2i} \subseteq \partial C_{2i-1} \cap \partial C_{2i+1}$ ■

Bahnplanung mit Zs.-hangsgraph

Folge von Zellen in \mathcal{K}_{frei} : $C_s = C_1, C_2, C_3, \dots, C_{2p+1} = C_t$,
sukzessive benachbart, wechselnde Dim. ■

Konstruiere Pfad τ aus Pfaden: $\tau_1, \tau_3, \dots, \tau_{2p+1}$ ■

- Von s nach $\sigma_3(C_2)$: τ_1 ■
- von $\sigma_3(C_{2i})$ zu $\sigma_3(C_{2i+2})$: τ_{2i+1} ■
- von $\sigma_3(C_{2p})$ nach t : τ_{2p+1} ■

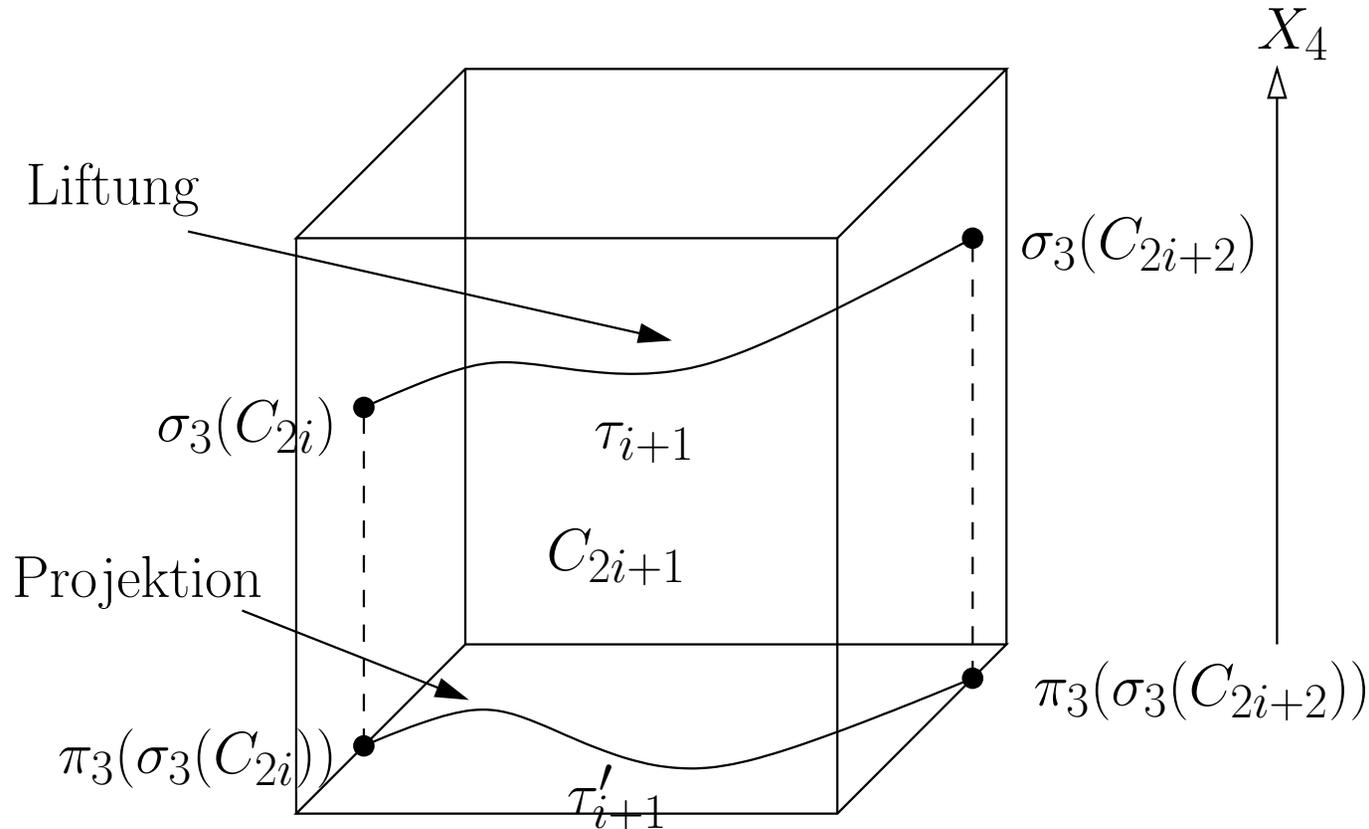
Induktiv über Dimension: ■

- Ind. Anf.: In \mathcal{K}_1 trivial, verbinden der nulldim. Punkte im Eindimensionalen! ■ In $\pi_2(\pi_3(\pi_4(C_{2i+1})))$ ist Pfad τ''_{i+1} von $\pi_2(\pi_3(\sigma_3(C_{2i})))$ nach $\pi_2(\pi_3(\sigma_3(C_{2i+2})))$ bereits konstruiert ■

- Annahme: Gelte schon für Dim. 2! Im Zweidimensionalen $\pi_3(\pi_4(C_{2i+1}))$ ist Pfad τ'_{i+1} von $\pi_3(\sigma_3(C_{2i}))$ nach $\pi_3(\sigma_3(C_{2i+2}))$ bereits konstruiert
- Im Dreidimensionalen: Lifte τ'_{i+1} zu Pfad $\tau_{i+1} \subset C_{2i+1}$ unter Beachtung der Zellenwänden von C_{2i+1} in Richtung $-X_4$ und $+X_4$

Bahnplanung mit Zs.-hangsgraph

Induktiver Schluss: **Lifting in nächste Ebene**



Theorem!

Das allgemeine Bahnplanungsproblem läßt sich effektiv lösen.■

■ Laufzeit: ■

Polynomiell in Grad der beteiligten Polynome! ■ Doppelt exponentiell in Zahl der Dimension!■

In der Praxis: Anzahl der Zellen reduzieren!■

Z.B.: Nur den Rand der Zellen betrachten!■

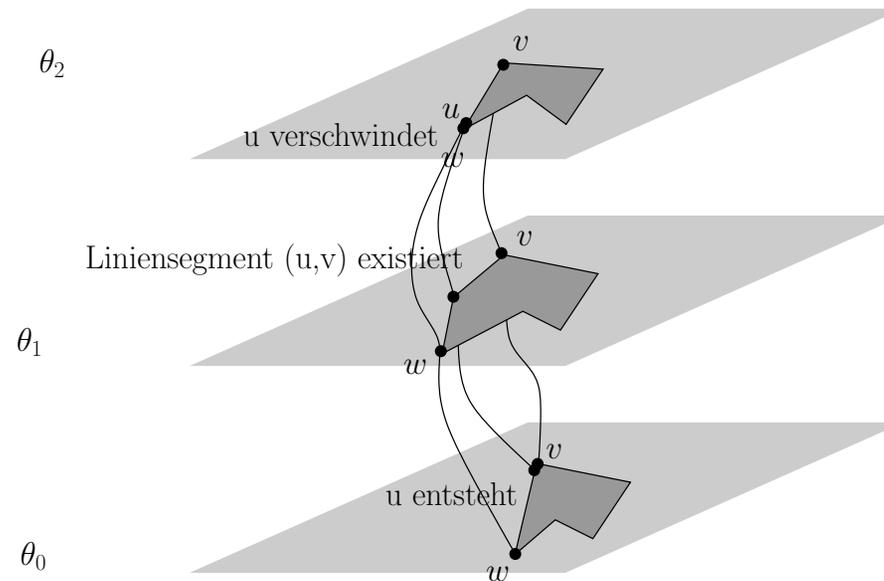
Spezielle Bahnplanung: Translation/Rotation

- Bis jetzt:■
 - – Graph V^θ für feste Orientierung■
 - Zusammenhang in V^θ und ∂C_{frei}^θ sind identisch■
 - Nötige Änderungen: ■Anzahl $O(mn\lambda_6(mn))$ Orientierungen, ■Aktualisierung für alle diese: $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ ■
 - Leider nur Obermenge berechnet: ■
Kandidaten (z.B. Krit. Platz.)■
 - Eventuell nicht frei!■
- Aufgabe:■
 - Alle diese Informationen in einer Struktur für die Bahnplanung abspeichern, zusammenfassen■

- Dabei: Die freien herausfiltern■
- Bahnplanung mit Struktur■

Struktur: Kantengraph **Def.: 2.43**

- Wie lange überlebt ein Knoten in C_{frei}^θ ■
- Wie lange überlebt eine Kante zwischen Knoten in C_{frei}^θ ■
- Bilden eine gekrümmte Fläche in C_{frei}^θ ? ■



Formal: Kantengraph Def.: 2.42

- θ_0 nicht-kritische Orientierung, u Knoten in V^{θ_0} (Beschriftung) ■
- Lebensdauer von u : max. Intervall $L(u) = (\theta_1, \theta_2) \ni \theta_0$, Knoten u kommt in jedem Knotengraph $V^\theta, \theta \in L(u)$, vor ■
- Kantengraph E : ■
 - erweiterte Knoten $(u, L(u))$ ■
 - Knoten $(u, L(u))$ und $(v, L(v))$ bilden Kante e in $E \Leftrightarrow$ es ex. $\theta \in L(u) \cap L(v)$ mit V^θ hat Kante (u, v) ■
 - Lebensdauer Kante e : max. Intervall $L(e) = (\theta_1, \theta_2) \ni \theta_0$, Kante (u, v) kommt in jedem Knotengraph $V^\theta, \theta \in L(e)$ vor ■
 - $e = ((u, L(u)), (v, L(v)))$ und $L(e)$ ergibt $(e, L(e))$ ■

Lösung

Kritische Orientierungen $T^* O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ ■

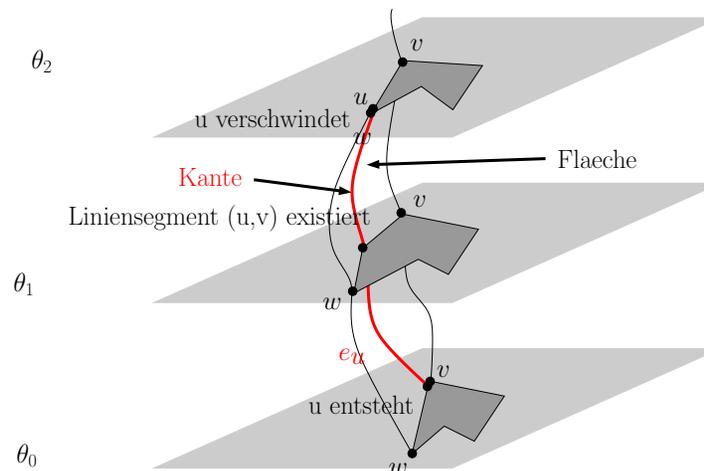
■ Aus T^* diejenigen herausfiltern, die tatsächlich frei sind:■

1. Bei korrekter Startkomponente beginnen■
2. Feststellen, wo sich Komponenten korrekt verbinden T' ■
3. Startpunkte korrekter Komponenten berücksichtigen T'' ■
4. Daraus T in $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ berechnen■
5. Orientierungen T enthält alles was wir brauchen! Sortiert!■

Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Damit läßt sich sukzessive V^θ bestimmen, sukzessive der
Kantengraph aufbauen Zeit $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$

- erweiterte Knoten $(u, L(u))$: Kante in C_{frei}
- erweiterter Knoten $(v, L(v))$: Kante in C_{frei}
- erw. Kante $e = ((u, L(u)), (v, L(v)))$ mit $L(e)$: Fläche in C_{frei}



Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge T aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem θ ! ■ Zeit: $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$,
■ $|T| = O(nm\lambda_6(mn))$ ■
- Wähle $\theta_0 \notin T$ und berechne V^{θ_0} . ■
- Initialisiere E mit den Kanten und Knoten aus V^{θ_0} , dabei bleiben die Lebensdauerintervalle $L(u)$ zunächst undefiniert. (Wir sind mitten in einem Intervall!!) ■

Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung θ_i in T :
 - Bestimme die Änderungen in V^θ : Übergang von $\theta = \theta_i - \varepsilon$ nach $\theta = \theta_i + \varepsilon$
 - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$ aus V^θ , setze θ_i als obere Grenze der Lebensdauer von $L(v_j)$ bzw. $L(e_k)$ ein
 - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten $v_1^*, \dots, v_r^*, e_1^*, \dots, e_s^*$ in V^θ und E ein, setze θ_i als untere Grenze der Lebensdauer von $L(v_j^*)$ bzw. $L(e_k^*)$ ein
- Nach 2π Durchlauf bei θ_0 : Trage noch fehlenden Lebensdauern nach, genauer: fasse zwei Knoten der Art $(u, (\theta_1, \text{undef.}))$ und $(u, (\text{undef.}, \theta_2))$ zu Knoten $(u, (\theta_1, \theta_2))$ zusammen

Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse: ■

■ Alle Änderungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$, ■ bereits gezeigt ■

Kantengraph hat Komplexität $O(mn\lambda_6(mn))$ ■

Anfangs: $O(mn)$, ■ dann kommen noch $O(mn\lambda_6(mn))$ Änderungen dazu ■

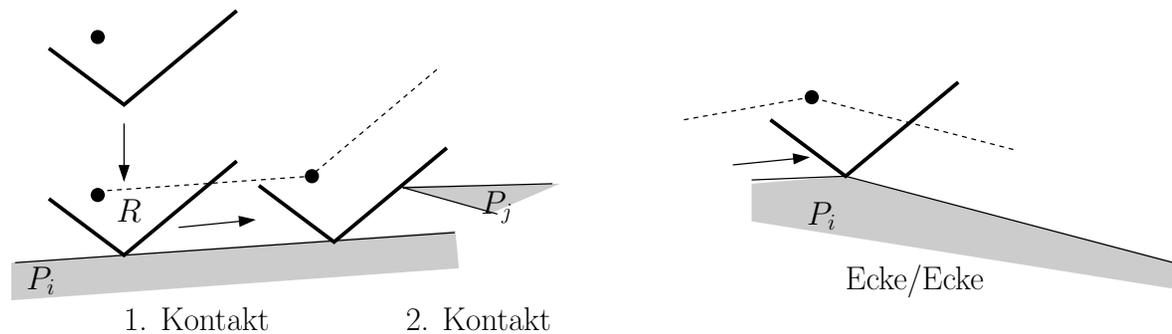
Aufbau: $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$! ■

Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung (x_1, y_1, θ_1) zu (x_2, y_2, θ_2) ? ■
- Kantengraph repräsentiert den Rand von C_{frei} ■
- Erstmal auf den Rand!! ■
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand ■
- $\Phi : C_{frei} \longrightarrow$ Knoten von E ■
- $(x, y, \theta) \longmapsto$ Knoten $(u, L(u))$ ■
- Entspricht Kante e_u von C_{frei} auf dem Rand der Zusammenhangskomponente Z von C_{frei} mit $(x, y, \theta) \in Z$ ■
- Konstruktiv!! ■

Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von R nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig
- Sonst Bewegung nach rechts, bis Knoten in V^θ
- Erweiterter Knoten $(u, L(u))$ in E
- In $O(nm)$ berechnen



Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung $s = (x_s, y_s, \theta_s)$ zu $t = (x_t, y_t, \theta_t)$? ■
- Kollisionsfrei? ■
- Existiert Weg von $\Phi(s)$ zu $\Phi(t)$ in E ? ■
- Korrektheit ■

Theorem 2.45: ■ s, t zwei freie Plazierungen von R .

Es gibt eine kollisionsfreie Bewegung von s nach t genau dann, wenn $\Phi(s)$ und $\Phi(t)$ Knoten derselben Zusammenhangskomponente Z des Kantengraphen E sind. ■

Beweis: Theorem 2.45

Lemma 2.46: ■

■ Zur Zusammenhangskomponente W von C_{frei} gehört eindeutig eine Zusammenhangskomponente Z von E mit:

Knoten von $Z \longleftrightarrow$ Kanten in ∂W .

■ Zusammenhangskomponenten korrelieren ■

Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt! ■
- $\Phi(s) = \Phi(x_s, y_s, \theta_s) = (u, L(u))$, $\Phi(t) = \Phi(x_t, y_t, \theta_t) = (v, L(v))$ ■
- e_u, e_v Kanten von C_{frei} , die zu Knoten $(u, L(u))$ und $(v, L(v))$ von E gehören ■
- kollisionsfreie Translation von $s = (x_s, y_s, \theta_s)$ nach u (Knoten $C_{\text{frei}}^{\theta_s}$) ■
- kollisionsfreie Translationen von $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ nach v (Knoten $C_{\text{frei}}^{\theta_t}$) ■

Beweis: Theorem 2.45

- \exists kollisionsfreie Bewegung von s nach t ■
- $\Leftrightarrow \exists$ kollisionsfreie Bewegung von u nach v ■
- $\Leftrightarrow \exists$ kollisionsfreie Bewegung von jedem Punkt auf e_u zu jedem Punkt auf e_v (Bewegung entlang der Kanten ist stets möglich) ■
- \Leftrightarrow Kanten e_u und e_v auf Rand derselben Zusammenhangskomponente W von C_{frei} ■
- \Leftrightarrow (Lemma 2.46) Knoten $(u, L(u)) = \Phi(s)$ und $(v, L(v)) = \Phi(t)$ in derselben Zusammenhangskomponente Z von E ■

Bewegungen

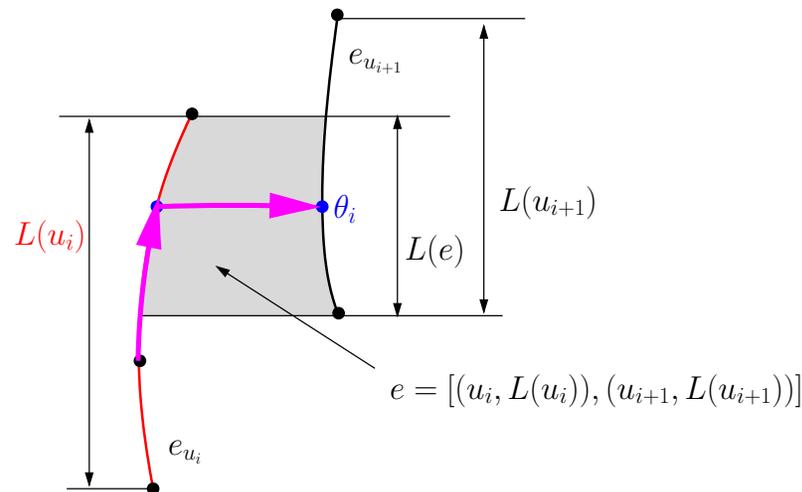
- **Theorem 2.45:** Weg in $E \Leftrightarrow$ kollisionsfreier Weg in C_{frei} existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben! e_u, e_v
- Breitensuche in E , Weg von $(u, L(u))$ nach $(v, L(v))$
- Existent? Falls nein: Es existiert kein Weg!
- Falls ja: Diesen Weg Ablaufen!

Weg in E ablaufen

- Weg in E ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten ■
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$ ■
- Übergang von $\xi_i = (u_i, L(u_i))$ zu $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$ ■
- θ_i in Lebensdauer Kante $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ■
- Start: An den Rand schieben! $(u_1, L(u_1))$ entspricht Kante e_{u_1} in C_{frei} ■
- Annahme: wir sind bereits auf Kante e_{u_i} in C_{frei} ■

Weg in E ablaufen

- Übergang von $\xi_i = (u_i, L(u_i))$ zu $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- An Kante e_{u_i} in C_{frei} angekommen
- θ_i in Lebensdauer Kante $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
- Rotation entlang e_{u_i} bis θ_i erreicht
- Translation von e_{u_i} nach $e_{u_{i+1}}$



Algorithmus 2.13

- Macht genau das!■
- Start: An den Rand schieben! $(u_1, L(u_1))$ entspricht Kante e_{u_1} in C_{frei} ■
- Übergang von $\xi_i = (u_i, L(u_i))$ zu $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$ ■
- Rotation entlang e_{u_i} bis θ_i erreicht■
- Translation von e_{u_i} nach $e_{u_{i+1}}$ ■
- Ende: Vom Rand wegschieben! $(u_l, L(u_l))$ entspricht Kante e_{u_l} in C_{frei} ■

Theorem 2.47

- Konvexer Roboter R , polygonale Szene P ■
- Translation und Rotation■
- Zeit: $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$, Komplexität: $O(mn \lambda_6(mn))$ ■
- Kollisionsfreie Bahn von s nach t ?■
- Falls existent: Angeben■
- Beweis: Gerade geführt!■

Bemerkungen

- Untere Schranke Komp: $\Omega((mn)^2)$, $O(mn\lambda_6(mn))$; Laufzeit:
■ $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ ■
- Spezialfall Leiter $O(n^2 \log n)$ ■
- Ganz C_{frei} auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ ■
- Nicht konvex: Komp: $\Omega((mn)^3)$; Laufzeit: $O((mn)^3 \log(mn))$ ■

