Abgabe: 24.01.17 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 30.01.-03.02.17

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1: Algebraische Strukturen (2+2+2 Punkte)

Seien M eine nichtleere Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf M. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine Verknüpfung $\circ$ durch $A \circ B = \{a \star b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ eine Halbgruppe ist, wenn $(M, \star)$ eine Halbgruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ein Monoid ist, wenn $(M, \star)$ ein Monoid ist.

c) Ist $(\mathcal{P}(M), \circ)$ stets eine Gruppe, wenn $(M, \star)$ eine Gruppe ist?

Aufgabe 12.2: Gruppe (4 Punkte)

Zeigen Sie Theorem 4.21 aus der Vorlesung:
Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und sei $G \subseteq M$ die Menge der invertierbaren Elemente. Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ eine Gruppe ist, wobei $\star : G \times G \to G$ die auf G eingeschränkte Verknüpfung $\circ$ bezeichnet, d.h. es gilt $x \star y = x \circ y$ $\forall x, y \in G$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\star$ tatsächlich eine Verknüpfung auf G ist.

Aufgabe 12.3: Ring (4 Punkte)

Betrachten Sie die Struktur $S = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus_n, \odot_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Struktur S ein kommutativer Ring mit Eins ist. Sie dürfen verwenden, dass $S_1 = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus_n)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 12.4: Körper (6 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $Q = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass Q zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation (aus $\mathbb{R}$) einen Körper bildet.

Aufgabe 12.5: Größter gemeinsamer Teiler (2+2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass eine Zahl der Form *abcabc* (also zum Beispiel 123123) durch 7, 11 und 13 teilbar ist.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = g$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass gilt $\mathrm{ggT}(a/g, b/g) = 1$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass gilt $\mathrm{ggT}(a/g, b) = 1$.