Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Probeklausur

Bitte beachten Sie folgende Hinweise: Beachten Sie, dass diese Probeklausur nur eine exemplarische Sammlung von möglichen Klausuraufgaben darstellt. Insbesondere ist der Umfang der Probeklausur etwas größer als der einer typischen Klausur. Inhaltlich wurden die Aufgaben 4 und 5 noch nicht in der Vorlesung behandelt. Die Probeklausur hat keinerlei Einfluss auf die Prüfungszulassung oder die endgültige Note. Die Besprechung findet Anfang Februar in der Vorlesung oder den Tutorien statt.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

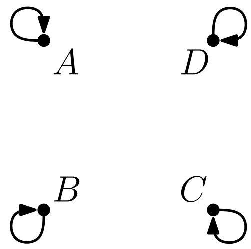
für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Seien M und N Mengen mit jeweils mindestens zwei Elementen und sei $f\colon M \to N$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass f surjektiv ist?

(I) $\exists x \in M\, \forall y \in N\colon f(x) = y$
(II) $\forall y \in N\, \exists x \in M\colon f(x) = y$
(III) $\forall x \in M\, \exists y \in N\colon f(x) = y$
(IV) $\forall y \in N\colon (\forall x \in M\colon f(x) \neq y) \Longrightarrow y \neq y$
(V) $\neg \exists y \in N\, \forall x \in M\colon f(x) \neq y$
(VI) $\forall y \in N \neg \forall x \in M\colon f(x) \neq y$

(c) Seien M und N nichtleere endliche Mengen und $f\colon M \to N$ eine surjektive Funktion. Zeigen Sie, dass dann $|M| \geq |N|$ gilt.

(d) Seien $M = \{A, B, C, D\}$ und $R \subseteq M \times M$ die unten schematisch dargestellte Relation auf M. Geben Sie mit Begründung an, ob R reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.



(e) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Wie viele symmetrische und gleichzeitig antisymmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

(a) Benennen Sie die fünf Komponenten, aus denen ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) besteht. Geben Sie bei Funktionen und Relationen stets den Definitions- und den Bildbereich an.

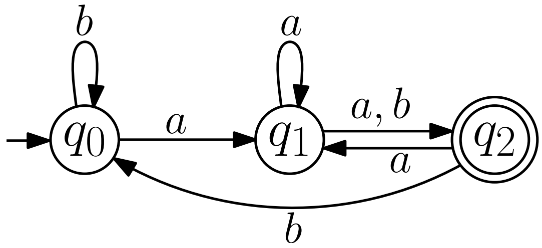
(b) Ist jede Untermenge $L' \subseteq L$ einer regulären Sprache L stets regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Geben Sie das Pumping-Lemma an.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Gibt es einen DFA, der die Sprache $L = \{a^i b^j : i, j \geq 1\}$ entscheidet und genau einen akzeptierenden Zustand besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Sei $L = \{w \in \Sigma^+ : \big| |w|_a - |w|_b \big| \leq 1\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Welche Sprache entscheidet der unten abgebildete NFA? Geben Sie einen DFA an, der dieselbe Sprache entscheidet.



(g) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ enthält nicht die Zeichenfolge 00 oder 11}\}$$

erzeugt.

(h) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, die die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \text{Die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

erzeugt.

Aufgabe 3

(a) Sei M eine überabzählbare Menge und sei $N \subseteq M$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass $M \setminus N$ überabzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ abzählbar ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ der Funktionen von den natürlichen Zahlen in die Menge $\{0, 1\}$ überabzählbar ist.

(d) Auf wie viele verschiedene Arten können beim Skat die Buben verteilt werden. Begründen Sie Ihre Antwort. (Es gibt beim Skat 4 verschiedene Buben, alle Karten werden verteilt, 3 Spieler erhalten jeweils 10 Karten und 2 Karten werden verdeckt in den Skat verteilt.)

Aufgabe 4

(a) Geben Sie für die Strukturen $S_1 = (\mathbb{Z}, \star)$ mit $x \star y = 2x + y$ und $S_2 = (\mathbb{R}^2, \bullet)$ mit $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = (x_1, y_2)$ mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

(b) Führen Sie den euklidischen Algorithmus für die Zahlen $a = 35$ und $b = 11$ aus.

(c) Bestimmen Sie das Inverse von $[\![11]\!]_{35}$ in $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}, \odot_{35})$.

(d) Bestimmen Sie mithilfe des chinesischen Restsatzes eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \bmod 11$ und $x \equiv 10 \bmod 35$.

Aufgabe 5

(a) In einem Staat mit Zweiparteiensystem finden Wahlen statt. Bei einer Erhebung am Wahllokal fragt ein Journalist vier miteinander befreundete Wähler, A, B, C und D, wie sie gewählt haben.

- A sagt: „Wenn B Partei 1 gewählt hat, dann auch C und D.“
- B sagt: „A hat nicht Partei 1 gewählt, aber D.“
- C sagt: „B hat genau dann Partei 2 gewählt, wenn A Partei 1 gewählt hat.“
- D sagt: „Wenn C Partei 1 gewählt hat, so hat A Partei 2 gewählt oder B Partei 1.“

Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die die Aussagen von A, B, C und D modelliert. Wen haben A, B, C und D jeweils gewählt? Geben Sie gegebenfalls alle möglichen Ergebnisse an.

(b) Es bezeichne AL^+ die kleinste Teilsprache von AL mit den folgenden drei Eigenschaften:

- Für jede Aussagenvariable $x \in \mathrm{AV}$ gilt $x \in \mathrm{AL}^+$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{AL}^+$ eine aussagenlogische Formel, dann gilt auch $(\varphi \vee \mathbf{0}) \in \mathrm{AL}^+$ und $(\varphi \wedge \mathbf{1}) \in \mathrm{AL}^+$.
- Sind $\varphi_1 \in \mathrm{AL}^+$ und $\varphi_2 \in \mathrm{AL}^+$ zwei aussagenlogische Formeln, dann gilt auch $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathrm{AL}^+$ und $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \mathrm{AL}^+$.

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}^+$ erfüllbar ist.

(c) Entscheiden Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie erfüllbar, gültig oder unerfüllbar sind.

- $\big(x_1 \leftrightarrow (\mathbf{1} \rightarrow x_1)\big)$
- $\big(x_1 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow \mathbf{0})\big)$
- $\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \leftrightarrow x_{2i})$ für $n \geq 2$

(d) Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln, gegeben durch

$$\varphi_n = \begin{cases} (x_n \vee x_{n+1}) & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ (x_n \rightarrow \neg x_{n+1}) & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Geben Sie eine Bewertung der Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ an, die φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.