Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 6
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 18.11.2014, bis 10:15 Uhr — Besprechung: KW 48

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Aufgabe 1: Reguläre Sprachen — 1+3 Punkte

Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ.

a) Zeigen Sie, dass auch das Komplement

$$\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$$

von L eine reguläre Sprache ist.

b) Zeigen Sie, dass auch der *Kleenesche Abschluss*

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i = \{w_1 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } w_1, \dots, w_n \in L\}$$

von L eine reguläre Sprache ist.

Aufgabe 2: Reguläre Ausdrücke — 1+1+2 Punkte

Beschreiben Sie jede der folgenden Sprachen durch einen regulären Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

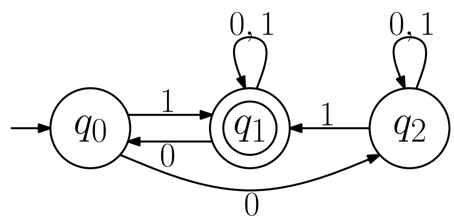
a) $L_1 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 1 \text{ und } (w_1 = 0 \text{ oder } w_n = 1)\}$

b) $L_2 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid n \geq 3 \text{ und } \exists\, i \in \{1, \dots, n-2\} \colon w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = 0\}$

c) $L_3 = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \colon w_i = 1 \Longrightarrow (i < n \wedge w_{i+1} = 0)\}$

Aufgabe 3: Reguläre Ausdrücke 2+2 Punkte

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L(M)$ des unten abgebildeten NFA M an.



b) Geben Sie einen NFA mit zwei Zuständen an, der die Sprache $L((a^+b^+)^*)$ entscheidet.
Hinweis: Für einen regulären Ausdruck R steht die Kurzschreibweise R^+ für $R(R)^*$. So steht zum Beispiel a^+b für aa^*b und nicht für $a+b$.

Aufgabe 4: Abzählbare Mengen 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die *Cantorsche Paarungsfunktion* $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, gegeben durch

$$g(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y$$

bijektiv ist.

Hinweis: Nutzen Sie die alternative Darstellung $g(x,y) = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$.