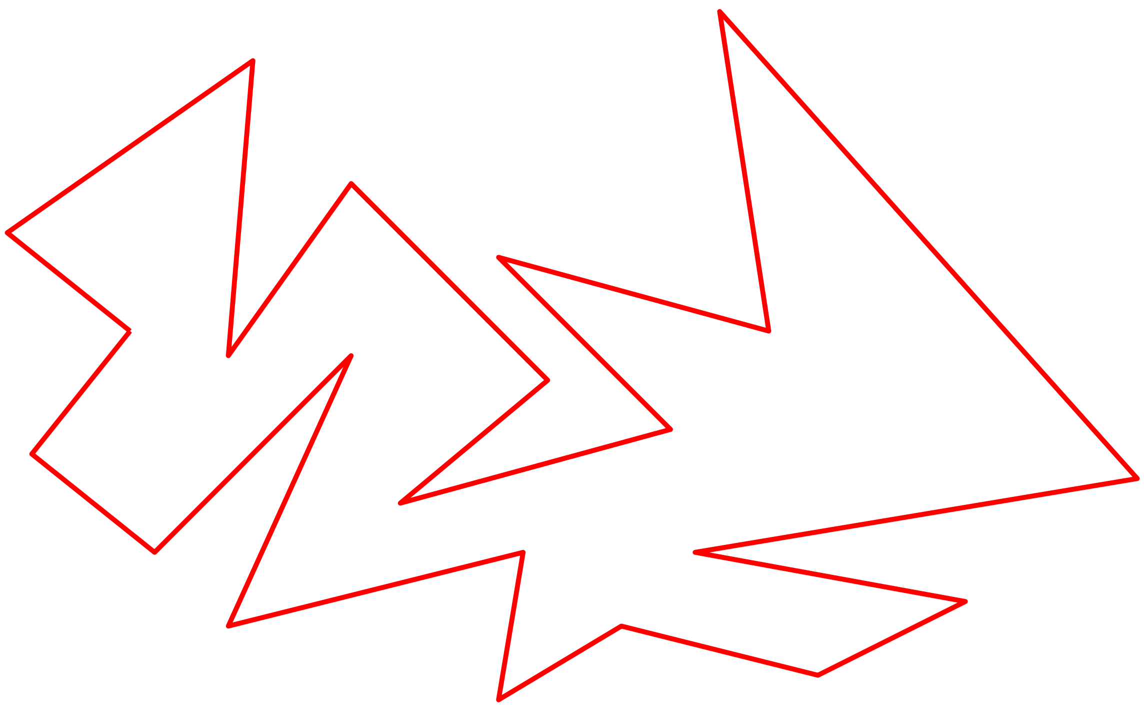
Offline Bewegungsplanung: Maximaler Durchmesser

Elmar Langetepe
University of Bonn

1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

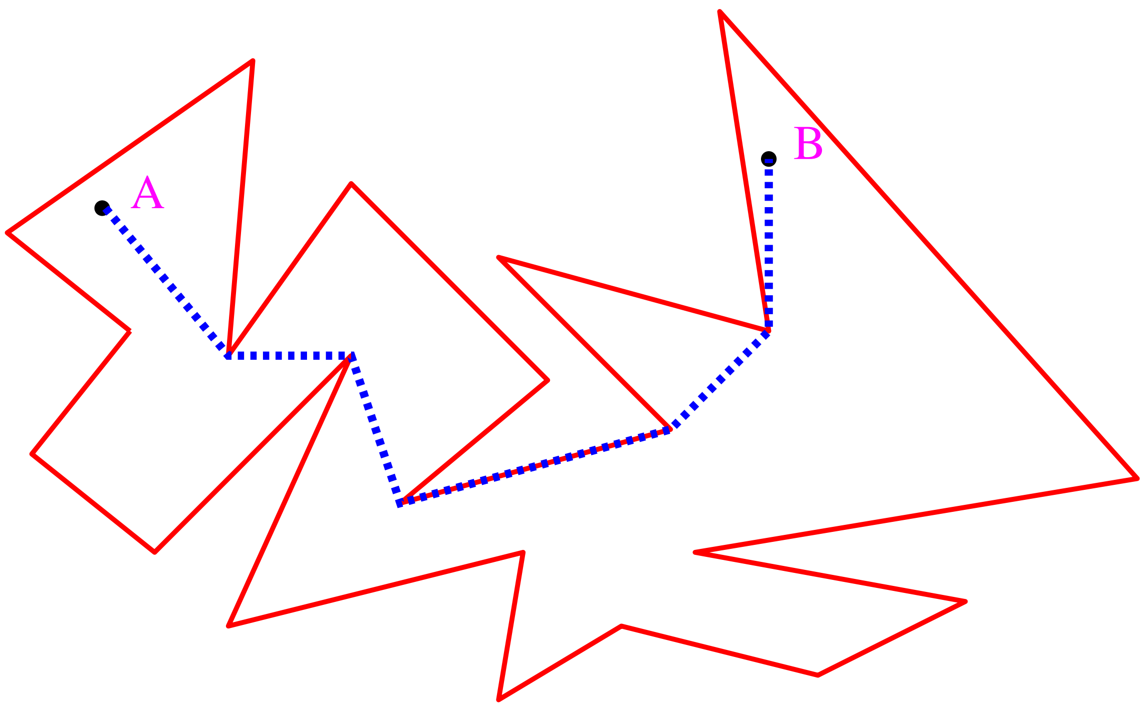
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P



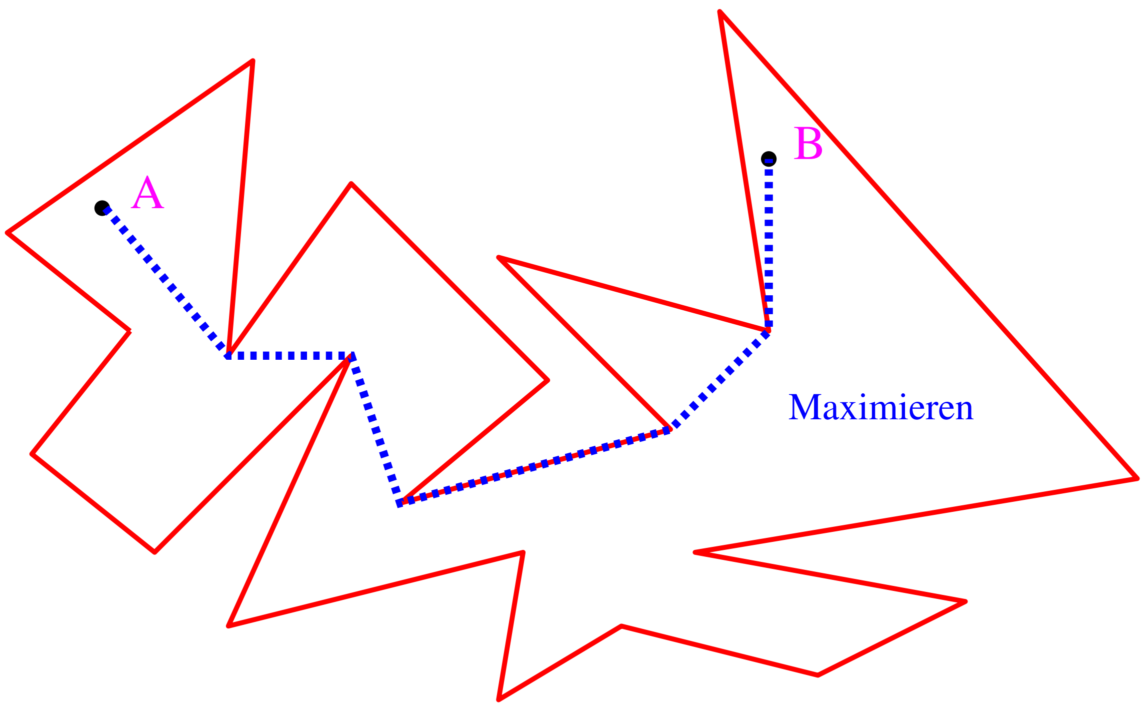
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten



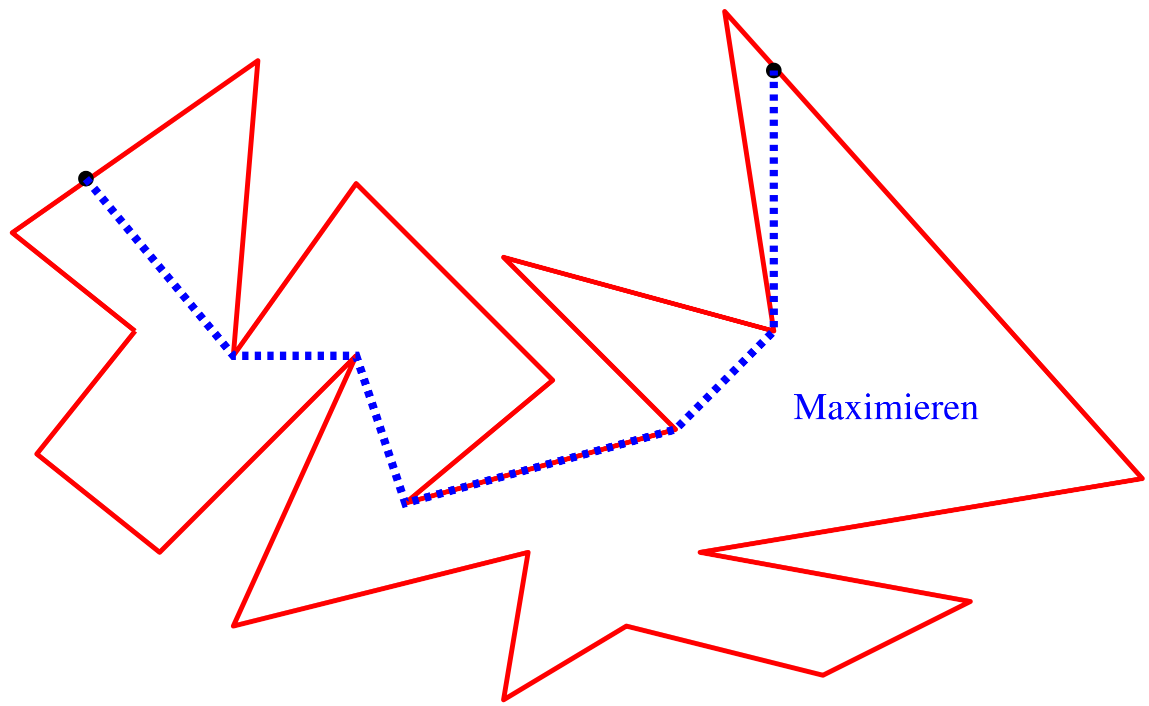
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten
- Endpunkte sind Ecken des Polygones



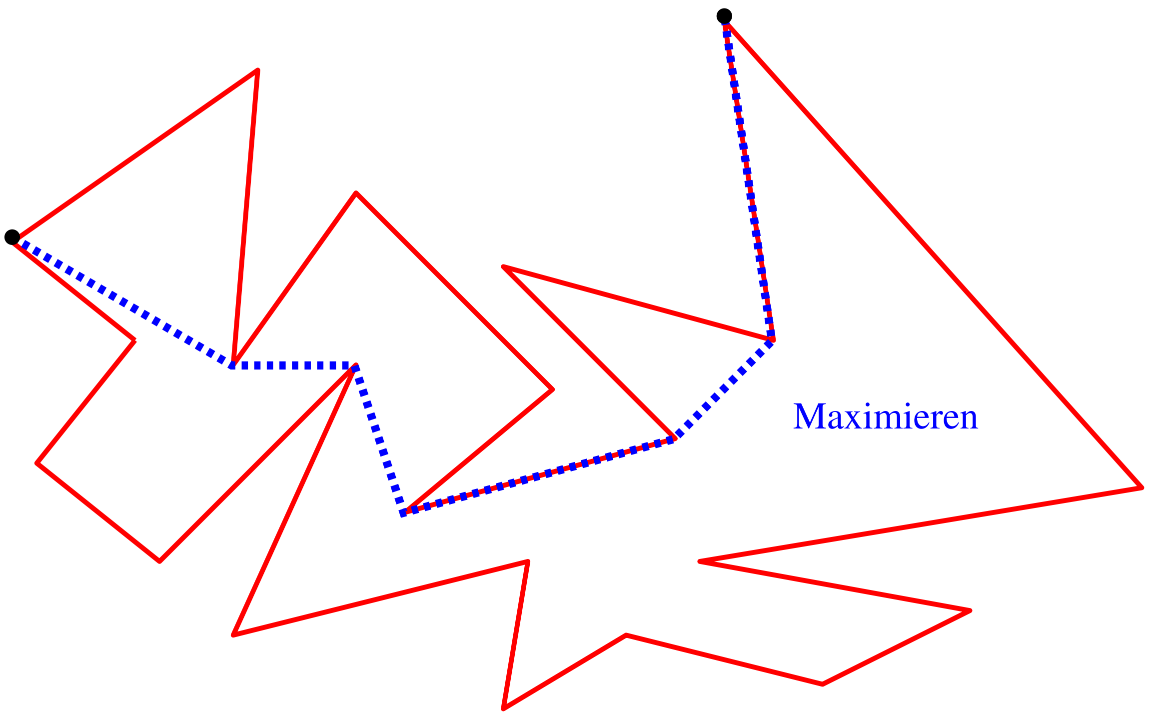
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten
- Endpunkte sind Ecken des Polygones



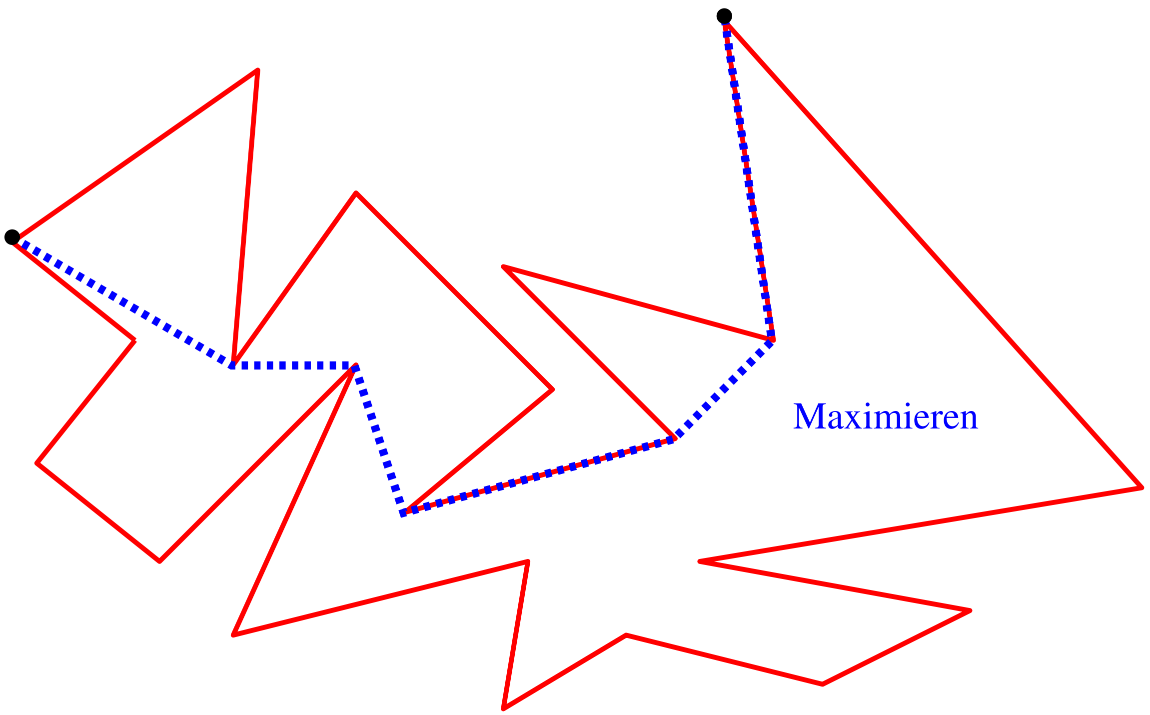
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten
- Endpunkte sind Ecken des Polygones



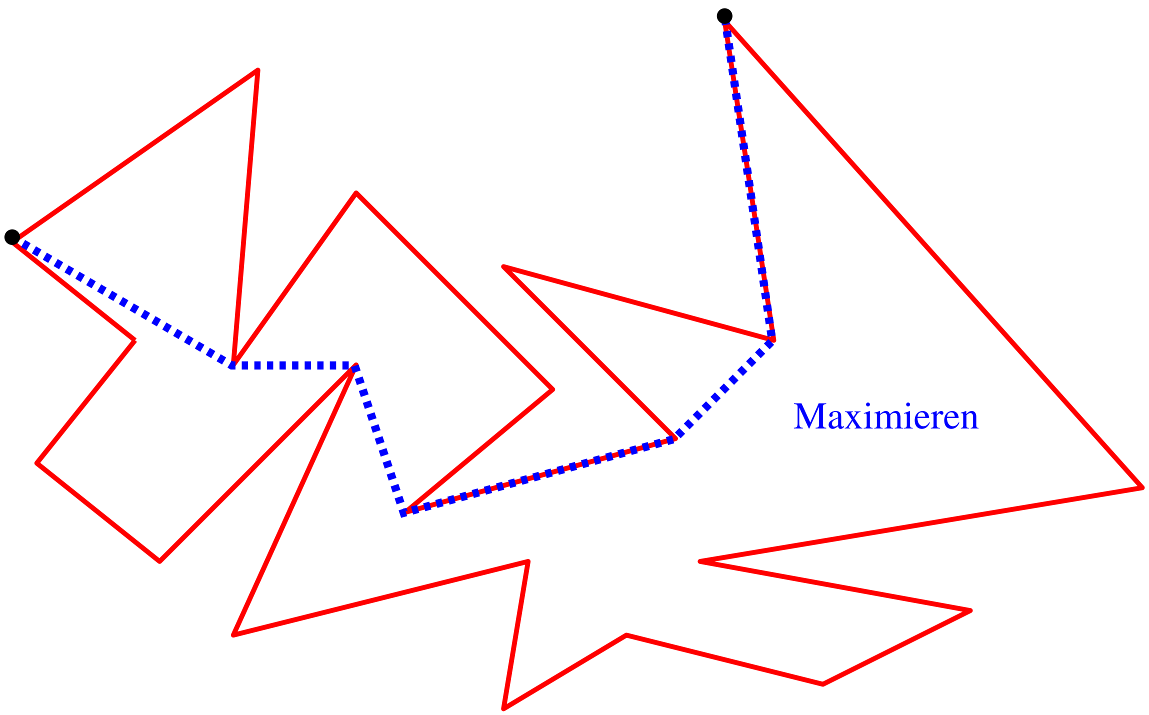
1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten
- Endpunkte sind Ecken des Polygones n^2 Kandidatenpaare



1.2.3 Durchmesser einfacher Polygone

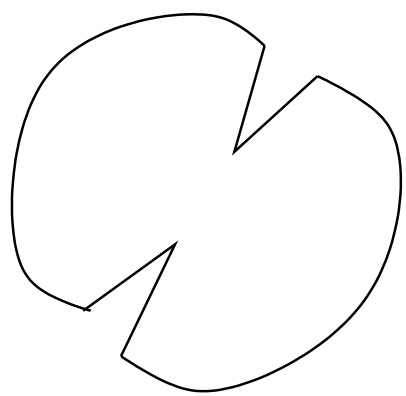
- Einfaches Polygon P
- Längster Kürzester Weg zwischen zwei Punkten
- Endpunkte sind Ecken des Polygones n^2 Kandidatenpaare
- Formal: $\max_{p_i, p_j \text{ Ecken von } P} d(p_i, p_j)$



Idee der Berechnung:

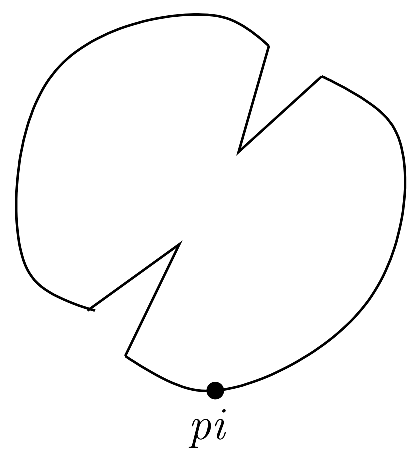
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes



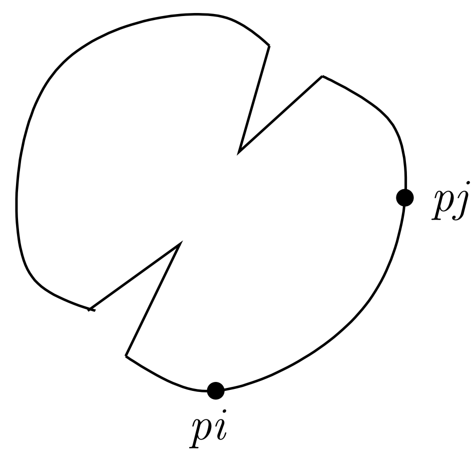
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes



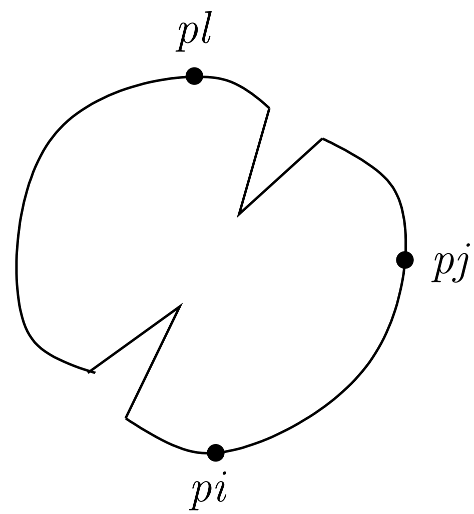
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes



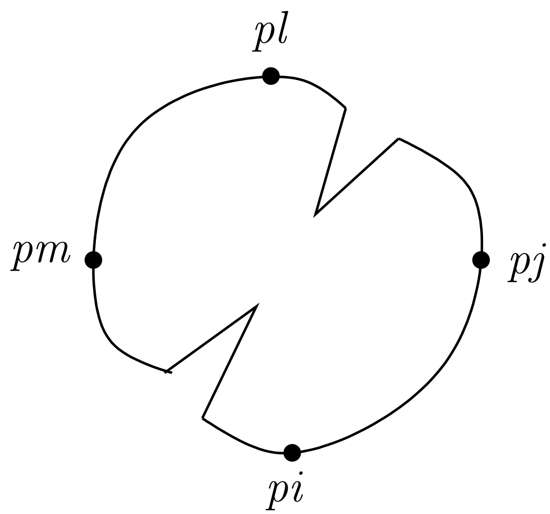
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes



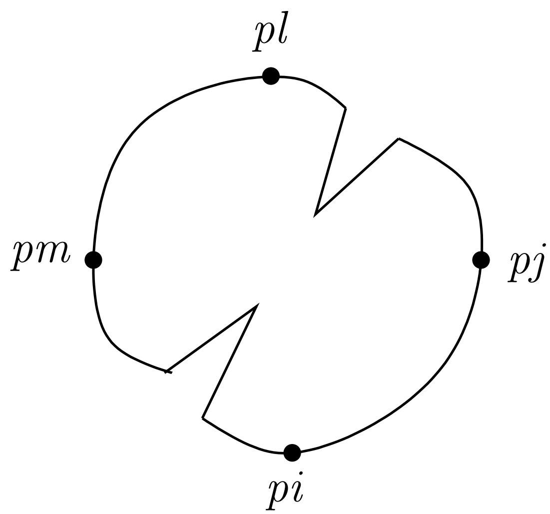
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes



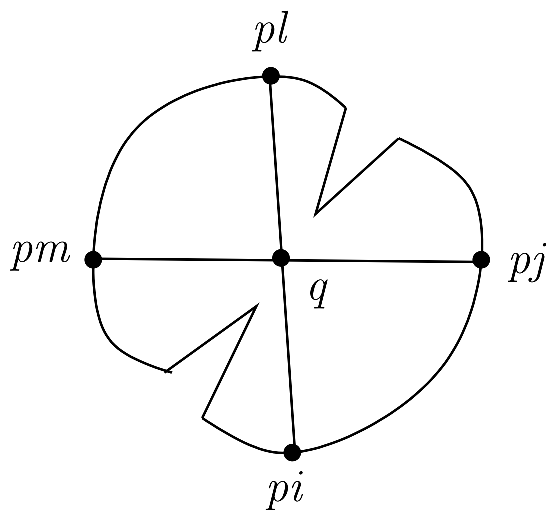
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$



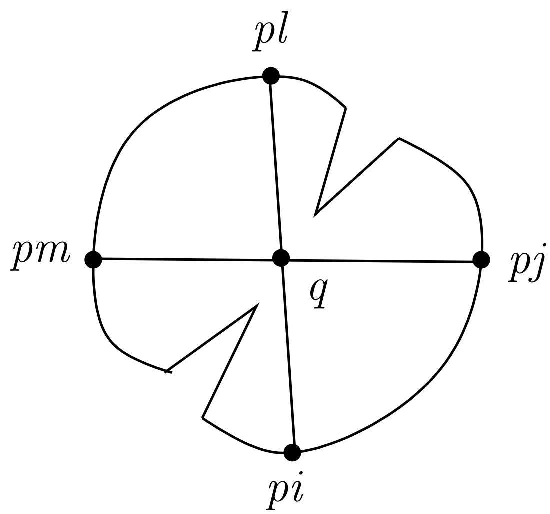
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich



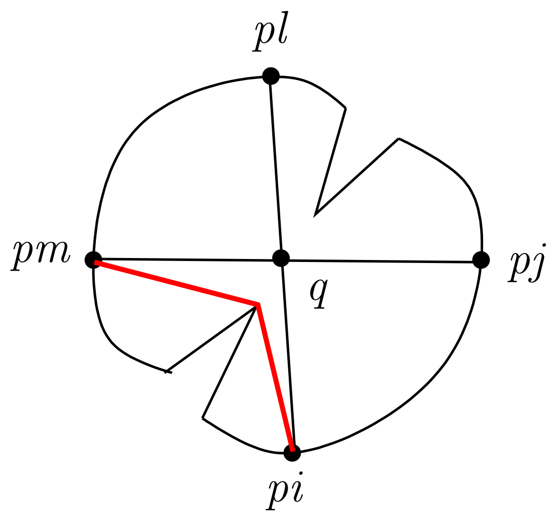
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich
- Dreiecksungleichungen anwenden!!



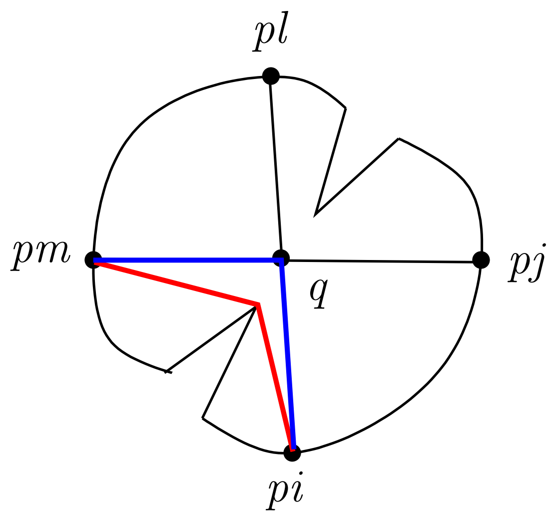
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich
- Dreiecksungleichungen anwenden!!



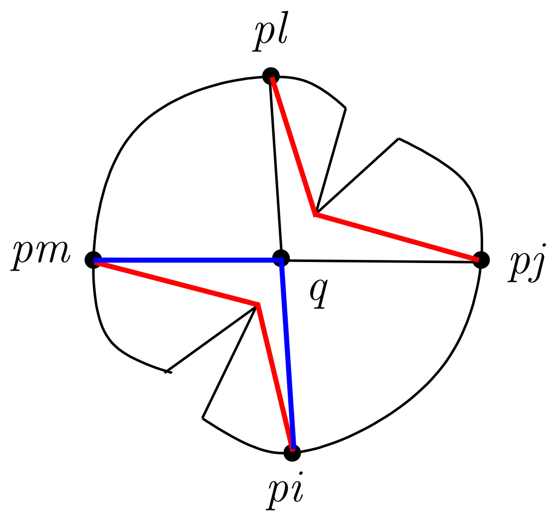
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich
- Dreiecksungleichungen anwenden!!



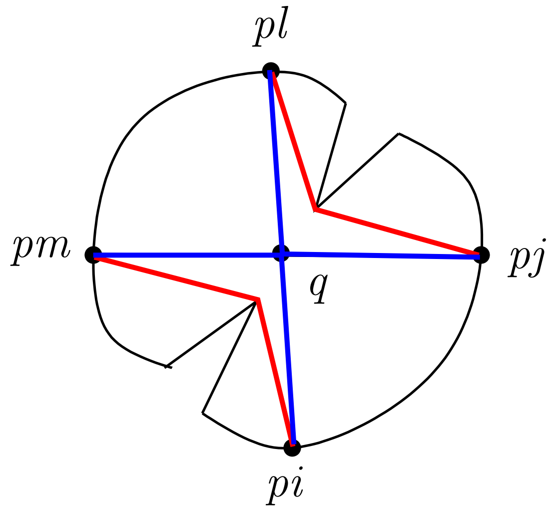
Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich
- Dreiecksungleichungen anwenden!!



Idee der Berechnung:

- p_i, p_j, p_l, p_m entlang des Randes
- Monge Eigenschaft: $d(p_i, p_m) + d(p_j, p_l) \leq d(p_i, p_l) + d(p_j, p_m)$
- Wege $\pi(p_i, p_l)$ und $\pi(p_j, p_m)$ schneiden sich
- Dreiecksungleichungen anwenden!!



Matrix A mit schöner Eigenschaft!

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} &
\begin{pmatrix}
1-n & \mathtt{d(1,2)} & \mathtt{d(1,3)} & \dots & \mathtt{d(1,n-1)} & \mathtt{d(1,n)} \\
1-n & 2-n & \mathtt{d(2,3)} & \dots & \mathtt{d(2,n-1)} & \mathtt{d(2,n)} \\
1-n & 2-n & 3-n & \dots & \mathtt{d(3,n-1)} & \mathtt{d(3,n)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1-n & 2-n & 3-n & \dots & \dots & \mathtt{d(n-1,n)} \\
1-n & 2-n & 3-n & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$\mathtt{d(i,j)}$ entspricht $\mathtt{d(p_i,p_j)}$ und $p_1, p_2, \dots, p_n$ Knoten entlang des Randes von P!

Def. 1.17: Monotone Matrix!

Def. 1.17: Monotone Matrix!

$n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$ heißt *monoton*, falls

Def. 1.17: Monotone Matrix!

$n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$ heißt *monoton*, falls

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < \ell \leq m : (a_{ik} < a_{i\ell} \Rightarrow a_{jk} < a_{j\ell}).$$

Def. 1.17: Monotone Matrix!

$n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$ heißt *monoton*, falls

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < \ell \leq m : (a_{ik} < a_{i\ell} \Rightarrow a_{jk} < a_{j\ell}).$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} k & & \ell \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} a_{ik} & < & a_{i\ell} \\ & \Downarrow & \\ a_{jk} & < & a_{j\ell} \end{pmatrix} \end{array}$$

Linkeste Zeilenmaxima weiter nach rechts

Linkeste Zeilenmaxima weiter nach rechts

$$\begin{pmatrix} \color{red}{5} & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & \color{red}{9} & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 10 & 7 & \color{red}{12} \end{pmatrix}$$

Lemma 1.19: A ist monoton!

Lemma 1.19: A ist monoton!

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} &
\begin{pmatrix}
1-n & \mathtt{d}(1,2) & \mathtt{d}(1,3) & \ldots & \mathtt{d}(1,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(1,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & \mathtt{d}(2,3) & \ldots & \mathtt{d}(2,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(2,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \mathtt{d}(3,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(3,\mathtt{n}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \ldots & \mathtt{d}(\mathtt{n}-1,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Lemma 1.19: A ist monoton!

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} &
\begin{pmatrix}
1-n & \mathtt{d}(1,2) & \mathtt{d}(1,3) & \ldots & \mathtt{d}(1,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(1,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & \mathtt{d}(2,3) & \ldots & \mathtt{d}(2,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(2,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \mathtt{d}(3,\mathtt{n}-1) & \mathtt{d}(3,\mathtt{n}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \ldots & \mathtt{d}(\mathtt{n}-1,\mathtt{n}) \\
1-n & 2-n & 3-n & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Beweis!!!

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i)

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i) aus Zeilenmaxima (A', i) gewinnen

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i) aus Zeilenmaxima (A', i) gewinnen
- Alg.1.8 Zeilenreduktion (gerade Zeilen auswählen): Monotone $n \times m$-Matrix B

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i) aus Zeilenmaxima (A', i) gewinnen
- Alg.1.8 Zeilenreduktion (gerade Zeilen auswählen): Monotone $n \times m$-Matrix B
- Zeilenmaxima ungerade Zeilen

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i) aus Zeilenmaxima (A', i) gewinnen
- Alg.1.8 Zeilenreduktion (gerade Zeilen auswählen): Monotone $n \times m$-Matrix B
- Zeilenmaxima ungerade Zeilen aus Zeilenmaxima gerade Zeilen gewinnen

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

- Monotone $n \times m$-Matrix $A = (a_{i\ell})$, $m \geq n$
- Alg.1.7 Spaltenreduktion (Spalten streichen): monotone $n \times n$-Matrix A'
- Zeilenmaxima (A, i) aus Zeilenmaxima (A', i) gewinnen
- Alg.1.8 Zeilenreduktion (gerade Zeilen auswählen): Monotone $n \times m$-Matrix B
- Zeilenmaxima ungerade Zeilen aus Zeilenmaxima gerade Zeilen gewinnen
- Rekursiv mit Spaltenreduktion (Alg. 1.7)!!

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls nein, dann:

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls nein, dann:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & \geq & a_{1,5} \\
 & & & & & & & \Uparrow & \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & \geq & a_{2,5} \\
 & & & & & & & \Uparrow & \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & \geq & a_{3,5} \\
 & & & & & & & \Uparrow & \\
 & & & & & & a_{4,4} & \geq & a_{4,5}
\end{array}$$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \stackrel{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls ja, dann:

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls ja, dann:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \overset{?}{<} & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,5}
\end{array}$$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls ja, dann:
$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \overset{?}{<} & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,5}
\end{array}$$

Streiche Spalte 4, weil:

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Invariante:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \geq & a_{1,4} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \geq & a_{2,4} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \geq & a_{3,4} & & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,4} & \overset{?}{<} & a_{4,5}
\end{array}$$

Falls ja, dann:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & & a_{1,5} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & & a_{2,5} \\
 & & & & a_{3,3} & \overset{?}{<} & a_{3,5} \\
 & & & & & & a_{4,5}
\end{array}$$

Streiche Spalte 4, weil:

$a_{i,4} \leq a_{i,3}$ für $i = 1, 2, 3$ und $a_{i,4} < a_{i,5}$ für $i = 4, \ldots, n$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Letzte Zeile erreicht!

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Letzte Zeile erreicht!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \geq & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,m} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \geq & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,m} \\
 & & & \ddots & \cdots & & \vdots & & & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & a_{n,n} & \geq & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,m}
\end{array}$$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Letzte Zeile erreicht!

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} & \geq & a_{1,n+1} & \ldots & a_{1,m} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} & \geq & a_{2,n+1} & \ldots & a_{2,m} \\
 & & & \ddots & \ldots & & \vdots & & & & \\
 & & & & \ldots & \ldots & a_{n,n} & \geq & a_{n,n+1} & \ldots & a_{n,m}
\end{array}
$$

Komplette Spalte $n+1$ Streichen!!

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Letzte Zeile erreicht!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \geq & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,m} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \geq & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,m} \\
 & & & \ddots & \cdots & & \vdots & & & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & a_{n,n} & \geq & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,m}
\end{array}$$

Komplette Spalte $n+1$ Streichen!!

Weiter mit Vergleich: $a_{n,n} \overset{?}{<} a_{n,n+2}$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Letzte Zeile erreicht!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1} & \geq & a_{1,2} & \geq & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \geq & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,m} \\
 & & a_{2,2} & \geq & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \geq & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,m} \\
 & & & \ddots & \cdots & & \vdots & & & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & a_{n,n} & \geq & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,m}
\end{array}$$

Komplette Spalte $n+1$ Streichen!!

Weiter mit Vergleich: $a_{n,n} \overset{?}{<} a_{n,n+2}$

Beispiel!!!

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'
- Zeilenmaxima von A' und A identisch

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'
- Zeilenmaxima von A' und A identisch
- Analyse:

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'
- Zeilenmaxima von A' und A identisch
- Analyse:
  - $O(m)$ Vergleiche

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'
- Zeilenmaxima von A' und A identisch
- Analyse:
  - $O(m)$ Vergleiche
  - $O(m)$ Zeiger für Rekonstruktion

Alg. 1.7: Spaltenreduktion

- Input: monotone $n \times m$ Matrix A, $m \geq n$
- Output: monotone $n \times n$ Matrix A'
- Zeilenmaxima von A' und A identisch
- Analyse:
  - $O(m)$ Vergleiche
  - $O(m)$ Zeiger für Rekonstruktion

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C)

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix $T\left(\frac{n}{2}\right)$

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix $T\left(\frac{n}{2}\right)$
  - Rekonstruktion (Zeiger) Zeilenmaxima von C

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix $T\left(\frac{n}{2}\right)$
  - Rekonstruktion (Zeiger) Zeilenmaxima von C $O(m)$

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix $T\left(\frac{n}{2}\right)$
  - Rekonstruktion (Zeiger) Zeilenmaxima von C $O(m)$
  - Berechnung Zeilenmaxima von B

Alg. 1.8: Zeilenmaxima

- Input: monotone $n \times m$ Matrix B
- Output: alle linkesten Zeilenmaxima $\max(i)$, $1 \leq i \leq n$
- Algorithmus:
  - C Zeilen von B mit geradem Index $O(n)$
  - C' durch Spaltenreduktion(C) $O(m)$
  - Rekursiv: Zeilenmaxima(C'), $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrix $T\left(\frac{n}{2}\right)$
  - Rekonstruktion (Zeiger) Zeilenmaxima von C $O(m)$
  - Berechnung Zeilenmaxima von B $O(m)$

$$\begin{pmatrix} \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix} \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix} \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix} \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\ \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix}
\mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\
\mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\
\mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\
\mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} \\
\mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x} & \mathtt{x}
\end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Berechnung Zeilenmaxima von B

$$\begin{pmatrix} \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \\ \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} & \texttt{x} \end{pmatrix}$$

$O(m)$ Schritte !!

Gesamtbeispiel

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} & 5 & 4 & 3 & 2 & & 1 & 0 & \\ 1 & & 7 & 3 & & 9 & 4 & 3 & \\ 4 & & 6 & 5 & & 8 & 6 & 7 & \\ 1 & & 4 & 2 & 6 & & 7 & & 8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & & 7 & 3 & \color{red}{\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & & 6 & 5 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & & 4 & 2 & 6 & 7 & \color{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \color{red}{\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \color{blue}{\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \color{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \color{red}{\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \color{blue}{\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \color{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \color{red}{\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \color{blue}{\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \color{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Spaltenreduktion:

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Spaltenreduktion: $\begin{pmatrix} & 9 & 3 & \\ 6 & & & 8 \end{pmatrix}$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} {\color{blue}\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & {\color{red}\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & {\color{blue}\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & {\color{red}\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:

$$\begin{pmatrix} & 9 & 3 \\ 6 & & {\color{red}\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} {\color{blue}\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & {\color{red}\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & {\color{blue}\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & {\color{red}\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:
$$\begin{pmatrix} {\color{blue}\Rightarrow}9 & 3 \\ 6 & {\color{red}\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \textcolor{blue}{\Rightarrow}5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \textcolor{red}{\Rightarrow}9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \textcolor{blue}{\Rightarrow}8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \textcolor{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Spaltenreduktion: $\begin{pmatrix} \textcolor{blue}{\Rightarrow}9 & 3 \\ 6 & \textcolor{red}{\Rightarrow}8 \end{pmatrix}$

Zeilenreduktion:

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:
$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 9 & 3 \\ 6 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:
$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 9 & 3 \\ 6 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:
$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 9 & 3 \\ 6 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion:
$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Spaltenreduktion:
$$\begin{pmatrix} & 8 \end{pmatrix}$$

Gesamtbeispiel

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & \Rightarrow 9 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & \Rightarrow 8 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Spaltenreduktion: $\begin{pmatrix} \Rightarrow 9 & 3 \\ 6 & \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$

Zeilenreduktion: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$

Spaltenreduktion: $\begin{pmatrix} \Rightarrow 8 \end{pmatrix}$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$T(m) \;\leq\; T\left(\frac{n}{2}\right)$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$T(m) \;\leq\; T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)}$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$T(m) \;\;\leq\;\; T\left(\frac{n}{2}\right)\ (\text{Rek.}) + C \times m$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$T(m) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)}$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$\begin{aligned} T(m) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)} \\ &\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + C\left(m + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$
\begin{array}{rcl}
T(m) & \leq & T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)} \\
& \leq & T\left(\frac{n}{4}\right) + C\left(m + \frac{n}{2}\right) \\
& \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$
\begin{aligned}
T(m) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)} \\
&\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + C\left(m + \frac{n}{2}\right) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&\leq T(1) + C\left(m + n\sum_{i=1}^{\log n} \frac{1}{2^i}\right)
\end{aligned}
$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$\begin{aligned}
T(m) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)} \\
&\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + C\left(m + \frac{n}{2}\right) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&\leq T(1) + C\left(m + n\sum_{i=1}^{\log n} \frac{1}{2^i}\right) \in O(m)
\end{aligned}$$

Theorem 1.20: Maxima für monotone Matrizen

Laufzeitanalyse:

$$
\begin{aligned}
T(m) &\leq T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times m \text{ (Sp.Red.+ Rekonstr. + Ber.)} \\
&\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + C\left(m + \frac{n}{2}\right) \\
&\vdots \quad \vdots \\
&\leq T(1) + C\left(m + n\sum_{i=1}^{\log n} \frac{1}{2^i}\right) \in O(m)
\end{aligned}
$$

Nur $O(m)$ viele Vergleiche!!!

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

- $n \times n$ Matrix A (symbolisch)

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

- $n \times n$ Matrix A (symbolisch)
- Preprocessing Guibas/Hershberger $O(n)$

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

- $n \times n$ Matrix A (symbolisch)
- Preprocessing Guibas/Hershberger $O(n)$
- Zeilenmaxima von A mit $O(n)$ Vergleichen

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

- $n \times n$ Matrix A (symbolisch)
- Preprocessing Guibas/Hershberger $O(n)$
- Zeilenmaxima von A mit $O(n)$ Vergleichen
- Je Vergleich $O(\log n)$ Aufwand für Wert

Theorem 1.21: Durchmesser eines Polygones

- $n \times n$ Matrix A (symbolisch)
- Preprocessing Guibas/Hershberger $O(n)$
- Zeilenmaxima von A mit $O(n)$ Vergleichen
- Je Vergleich $O(\log n)$ Aufwand für Wert
- Gesamtlaufzeit: $O(n \log n)$

1.2.4 Shortest Watchman Routes

1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem,

1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s

1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück

1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)

1.2.4 Shortest Watchman Routes

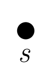
- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)
- Polygonale Szene: NP-hart Theorem 1.22

1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)
- Polygonale Szene: NP-hart Theorem 1.22
- Beweis: TSP reduzieren auf SWR

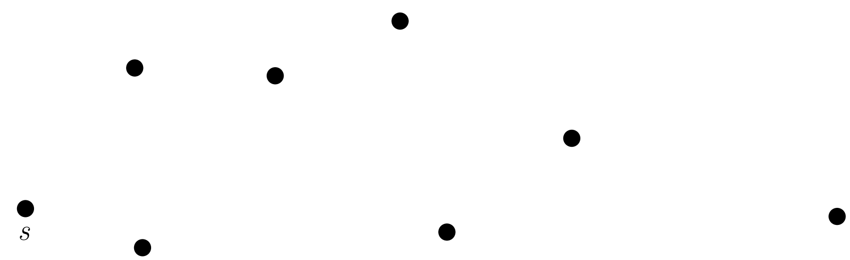
1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)
- Polygonale Szene: NP-hart Theorem 1.22
- Beweis: TSP reduzieren auf SWR



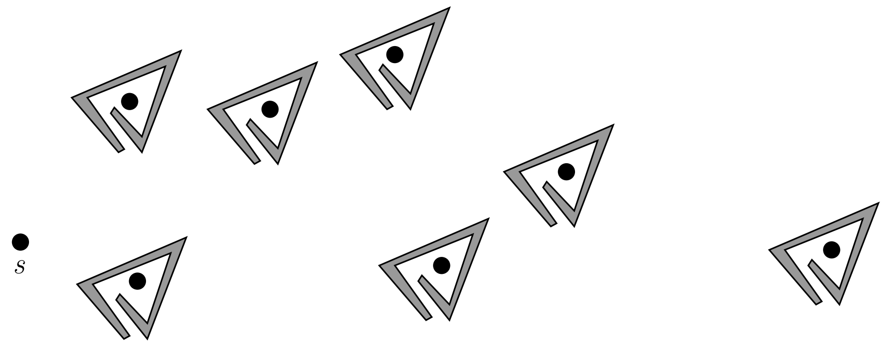
1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)
- Polygonale Szene: NP-hart Theorem 1.22
- Beweis: TSP reduzieren auf SWR



1.2.4 Shortest Watchman Routes

- Agent mit Sichtsystem, Startpunkt s
- Route: Einmal alles *sehen* und zurück
- Tour: Einmal alles *sehen* (offen)
- Polygonale Szene: NP-hart Theorem 1.22
- Beweis: TSP reduzieren auf SWR



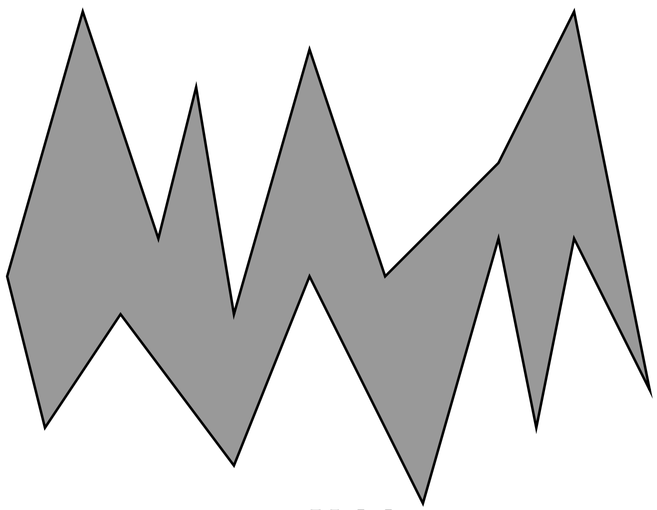
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23

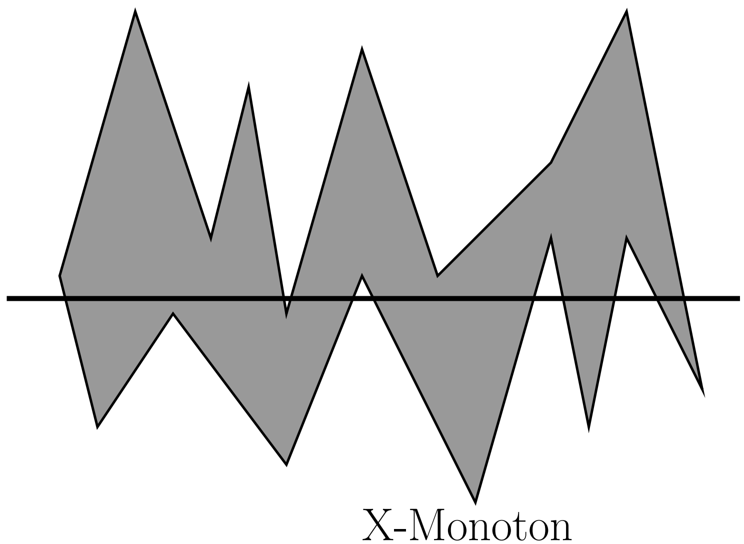
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



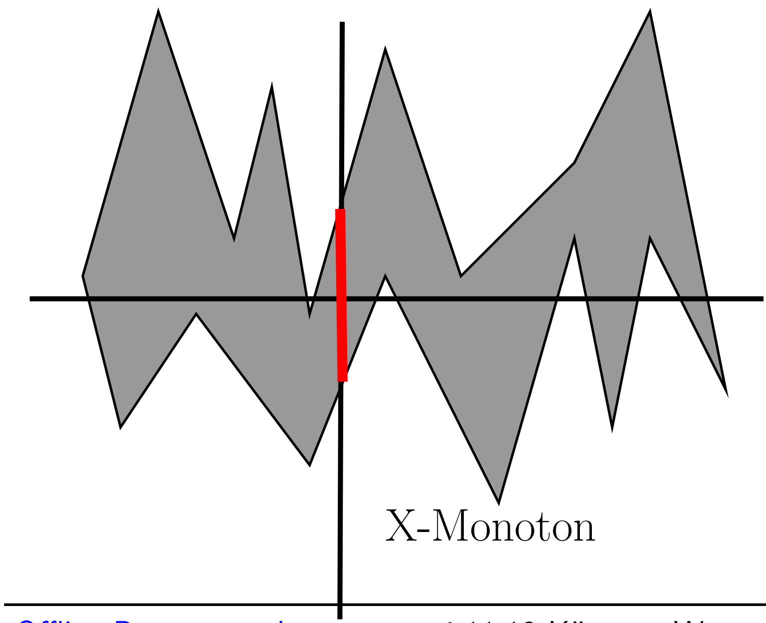
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



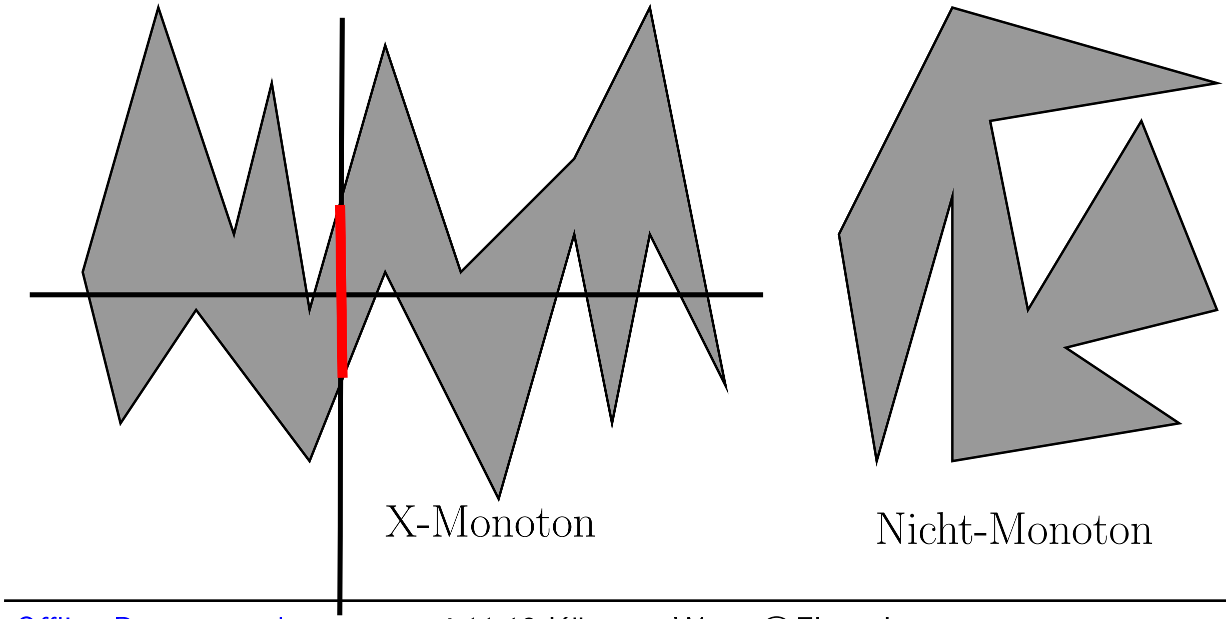
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



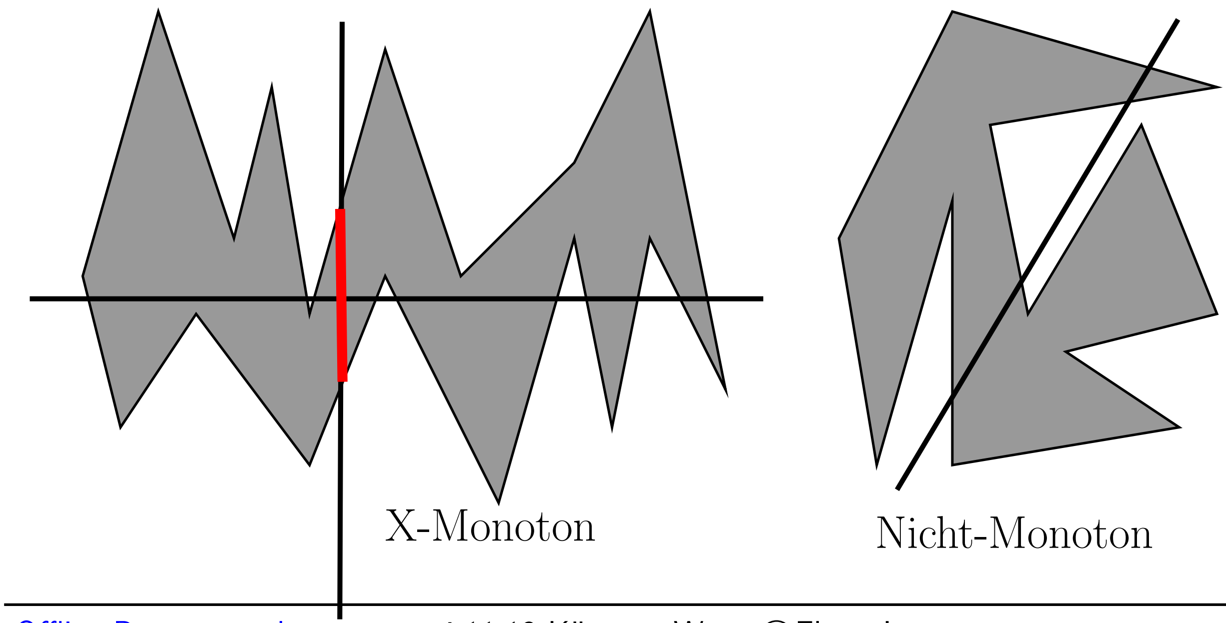
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



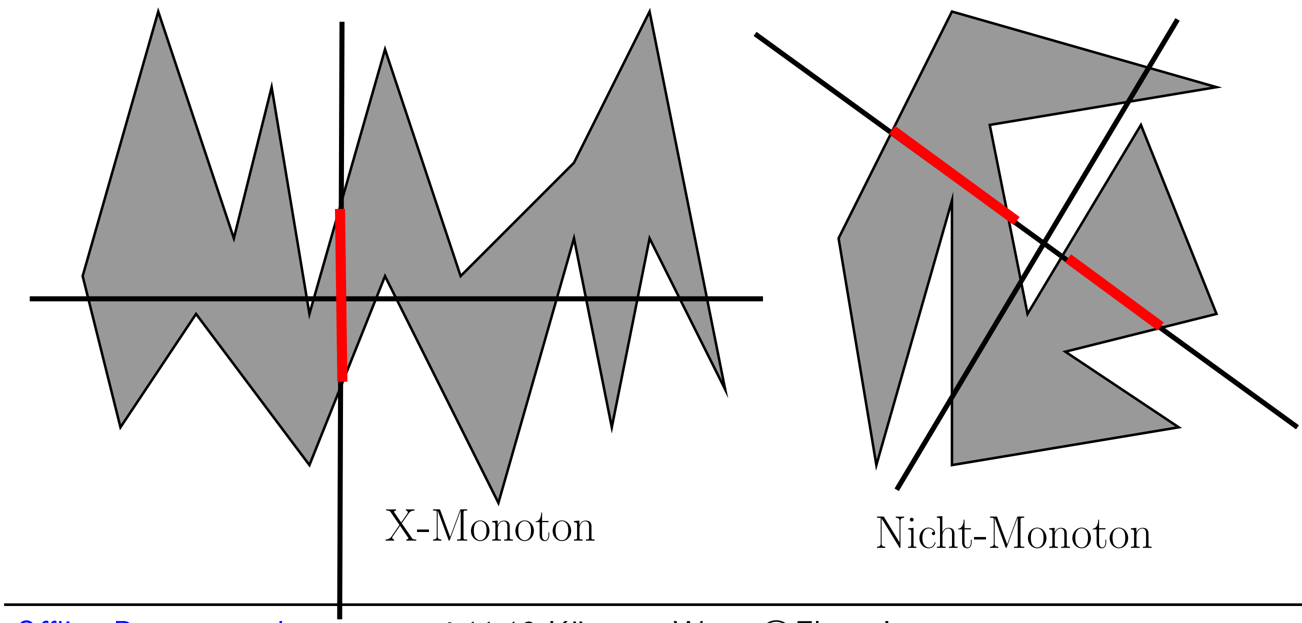
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



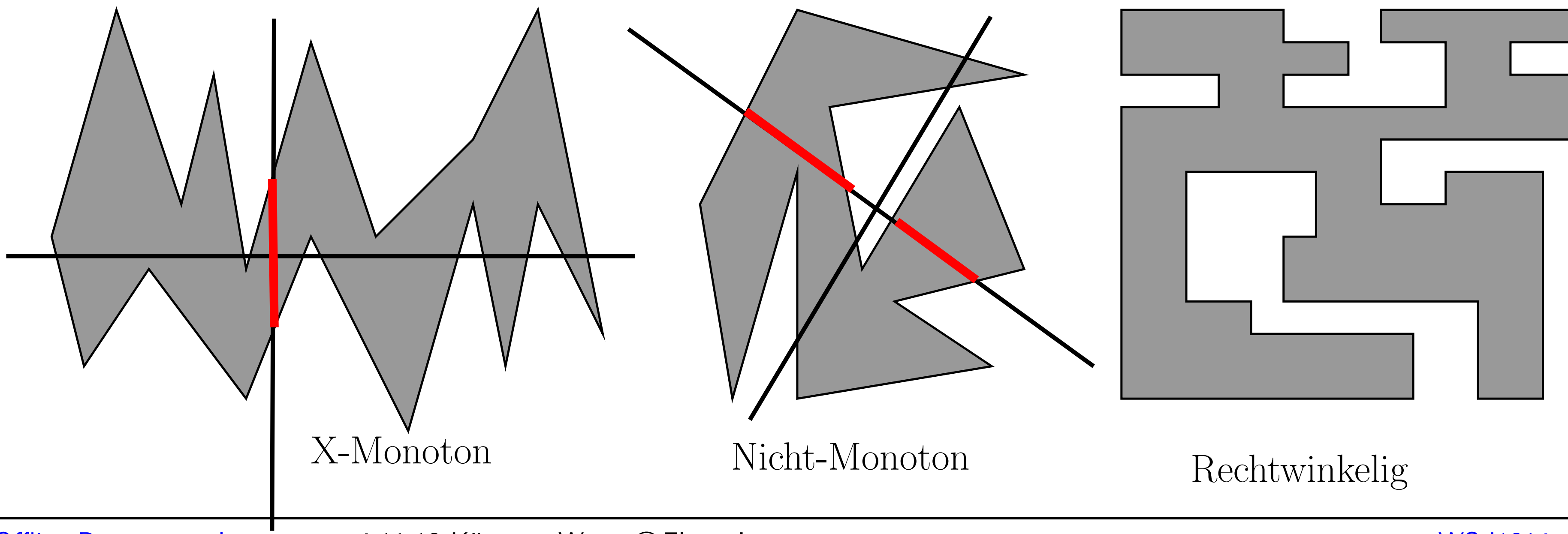
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l



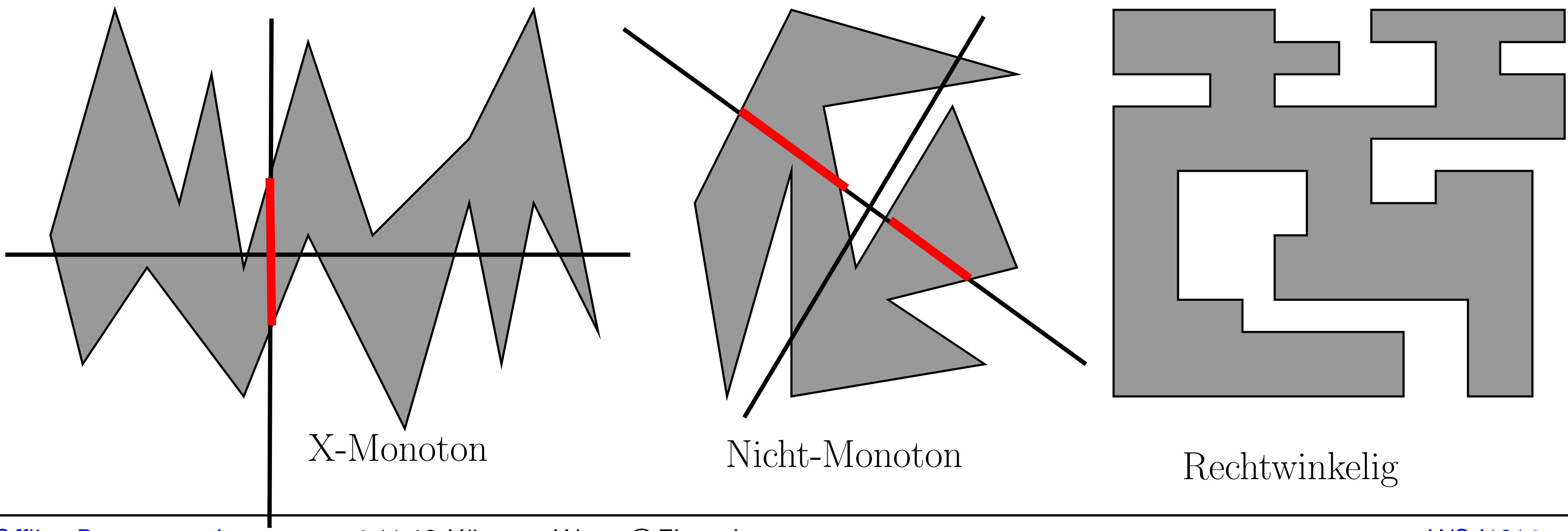
Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l
- Rechtwinkelige Polygone



Polynomiell innerhalb einfacher Polygonen

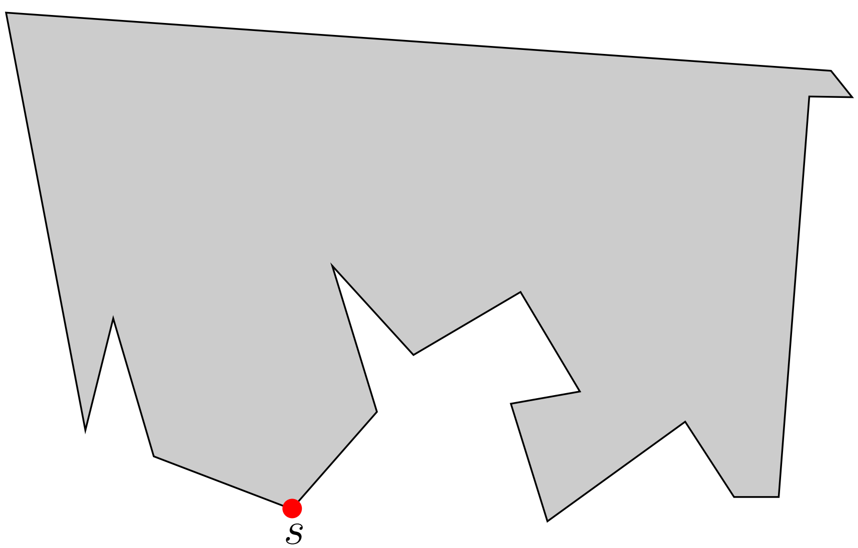
- Standardmittel (noch einfacher): Def. 1.23
- Monotone Polygone: Monoton bezüglich l
- Rechtwinkelige Polygone
- Rechtwinkelige und monotone Polygone: SWR in $O(n)$ Theorem 1.24



Was ist wichtig? Def. 1.25

Was ist wichtig? Def. 1.25

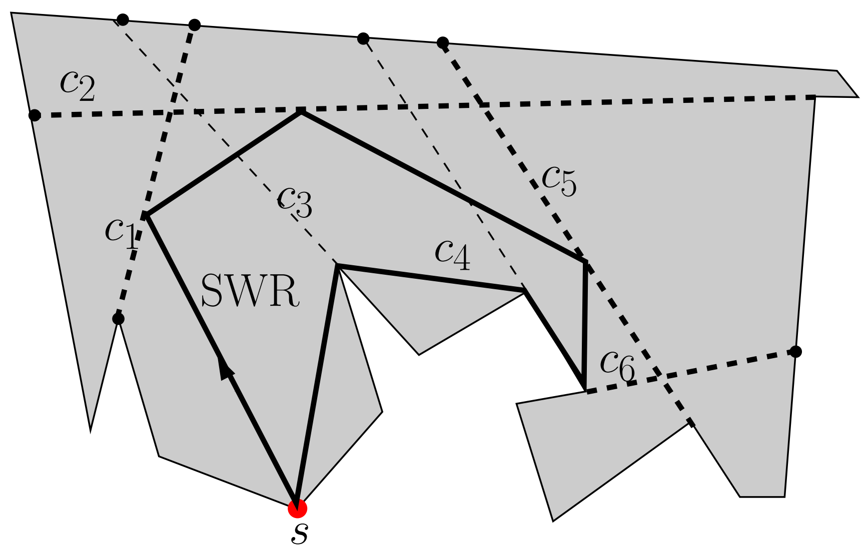
a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken



Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

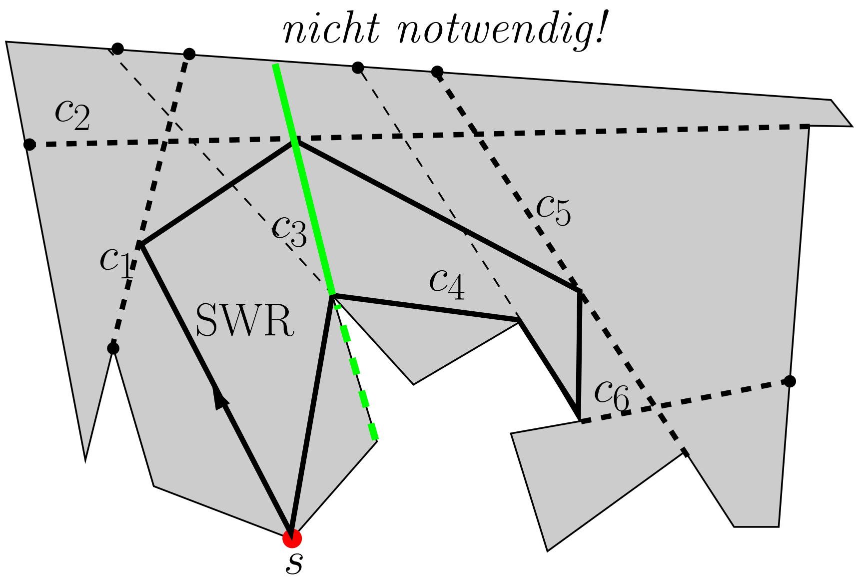
b) Notwendige Cuts (bezüglich s)



Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

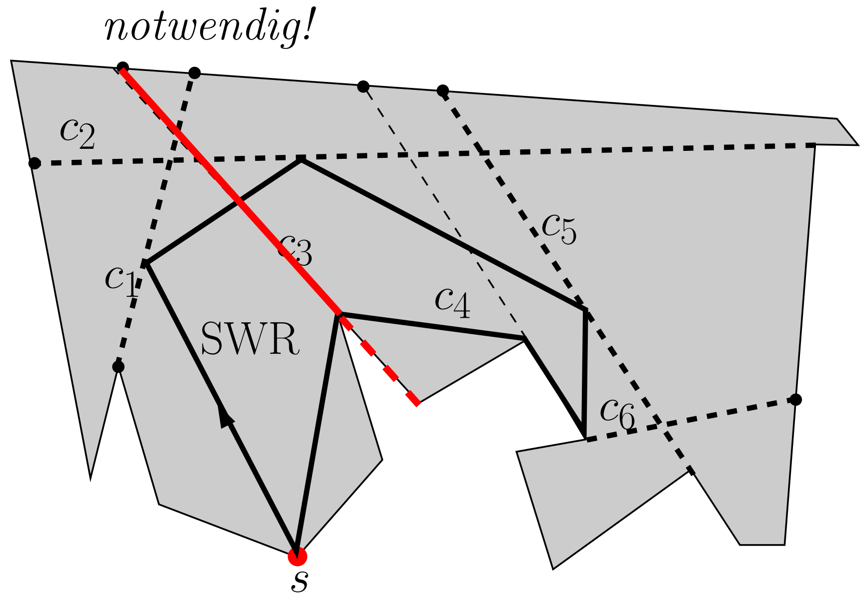
b) Notwendige Cuts (bezüglich s)



Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

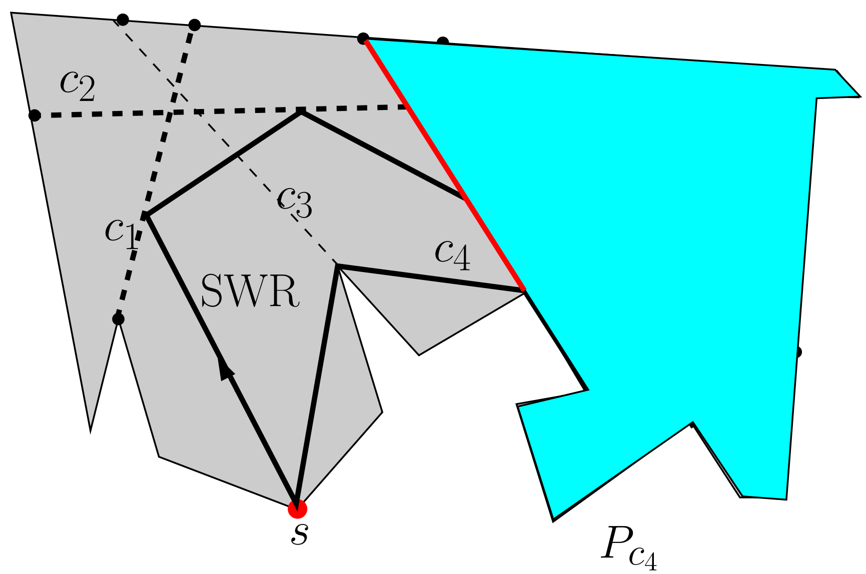


Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$

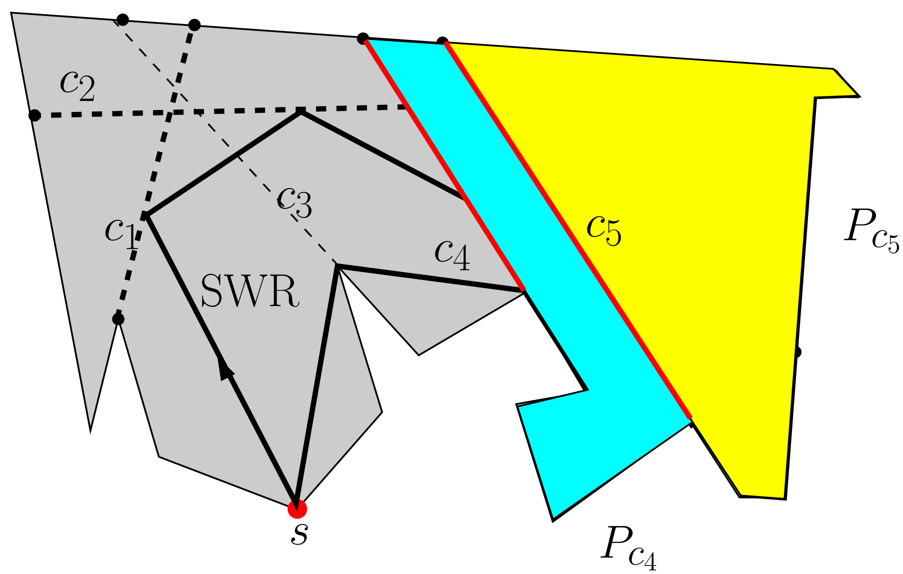


Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$

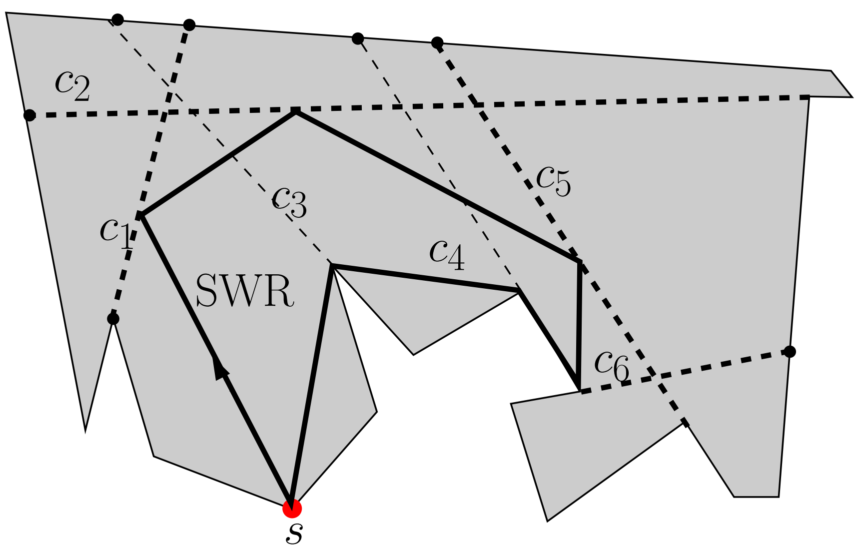


Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$



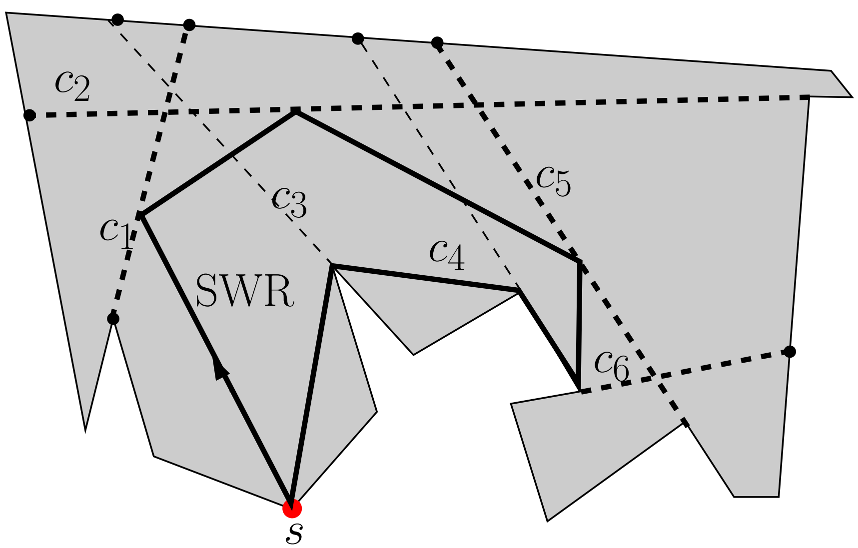
Was ist wichtig? Def. 1.25

a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$

d) Wesentliche Cuts



Was ist wichtig? Def. 1.25

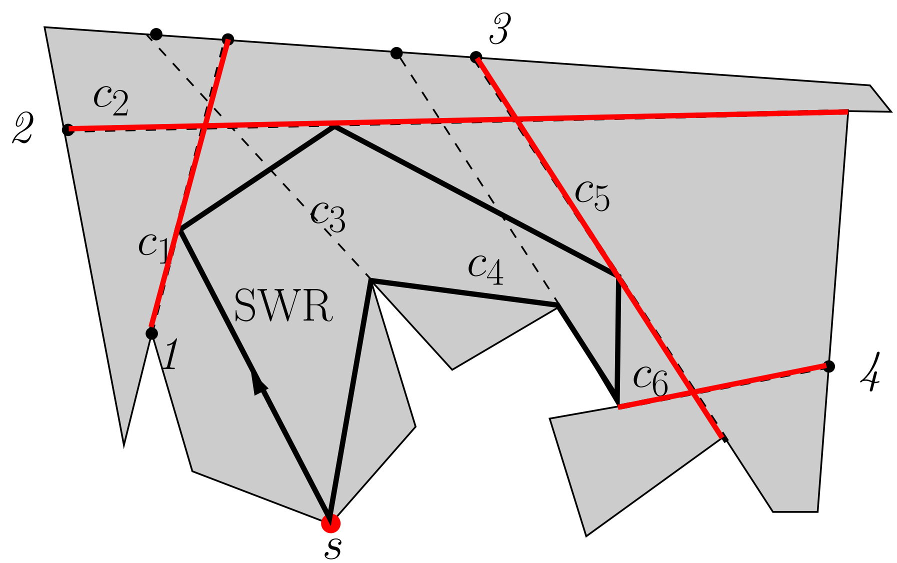
a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$

d) Wesentliche Cuts

e) Ordnung der wesentlichen Cuts



Was ist wichtig? Def. 1.25

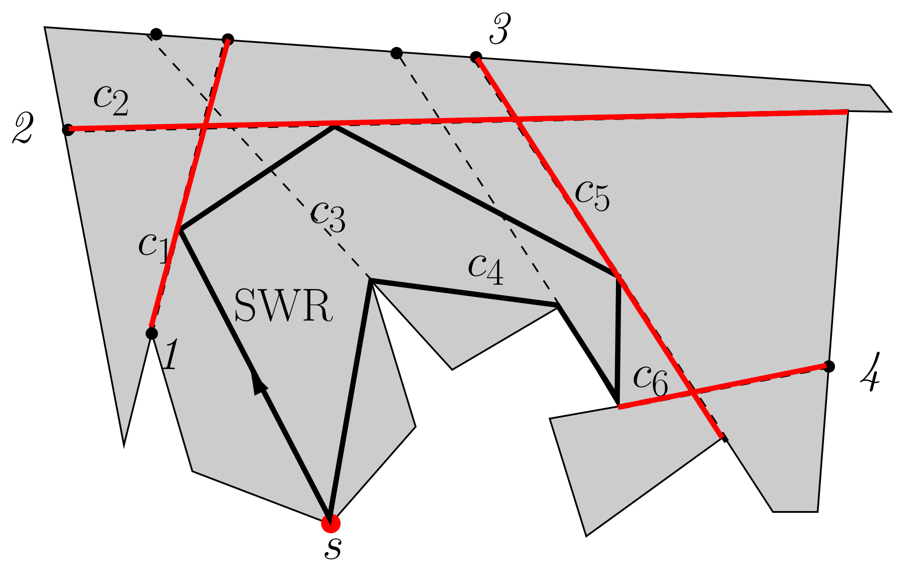
a) (Cuts) Extensionen der reflexen Ecken

b) Notwendige Cuts (bezüglich s)

c) Dominanz-Beziehung $P_{c_i} \subseteq P_{c_j}$

d) Wesentliche Cuts

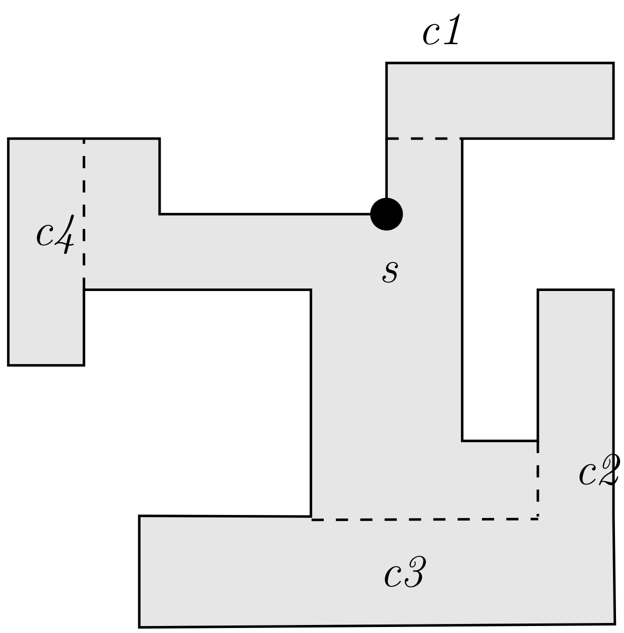
e) Ordnung der wesentlichen Cuts



Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

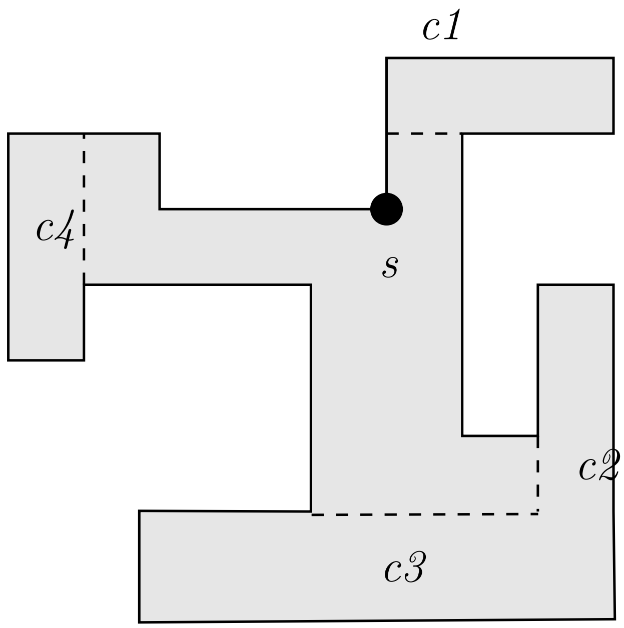
Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

- Rechtwinkeliges Polygon



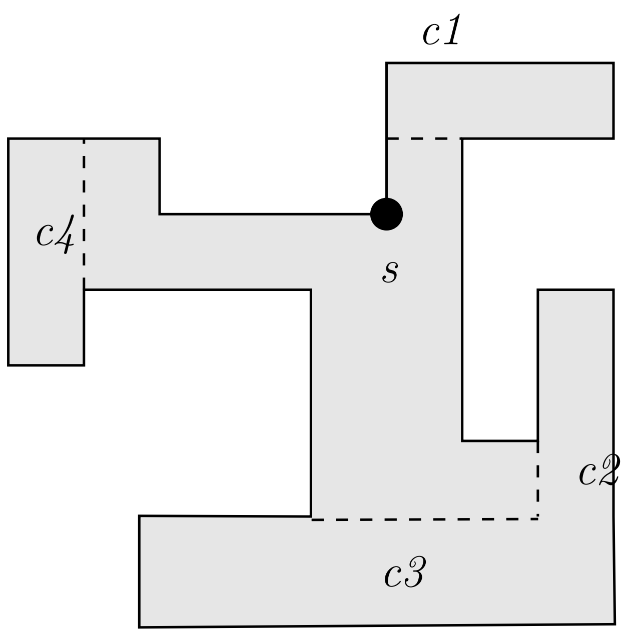
Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

- Rechtwinkeliges Polygon
- Wesentliche Cuts werden nie überschritten!



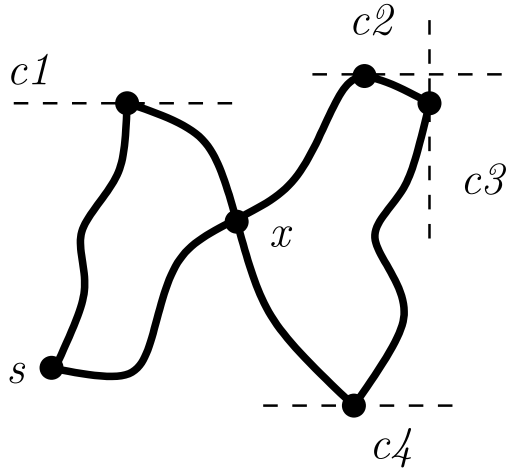
Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

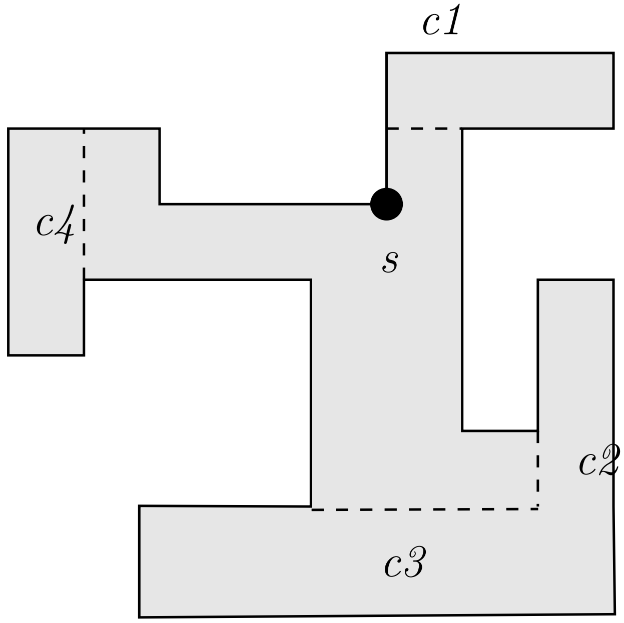
- Rechtwinkeliges Polygon
- Wesentliche Cuts werden nie überschritten!
- SWR besucht Cuts gemäß Ordnung



Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

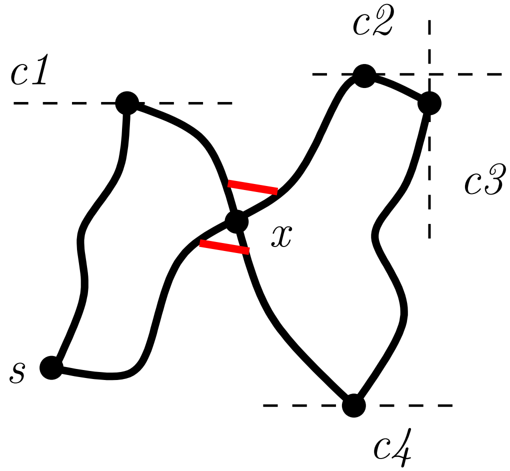
- Rechtwinkeliges Polygon
- Wesentliche Cuts werden nie überschritten!
- SWR besucht Cuts gemäß Ordnung
- Widerspruch! Abkürzung!

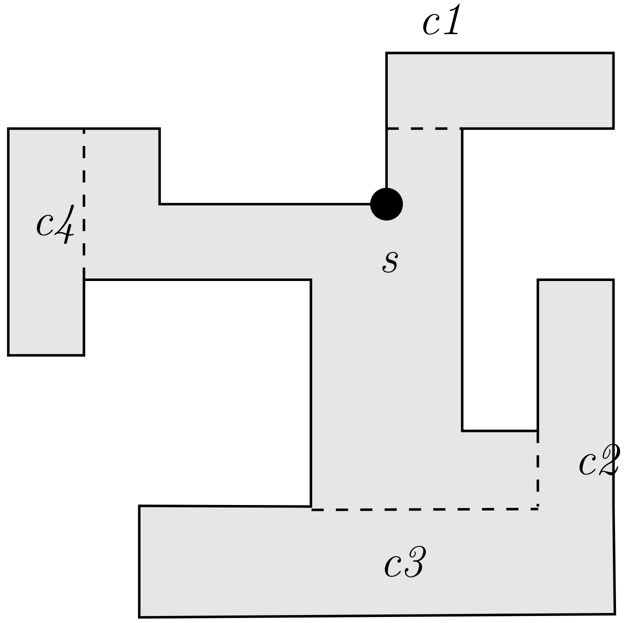




Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

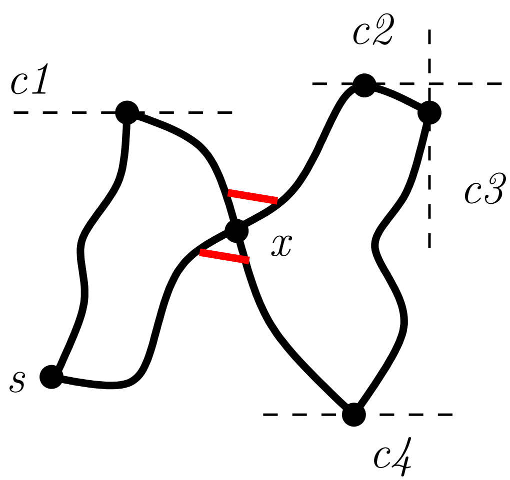
- Rechtwinkeliges Polygon
- Wesentliche Cuts werden nie überschritten!
- SWR besucht Cuts gemäß Ordnung
- Widerspruch! Abkürzung!

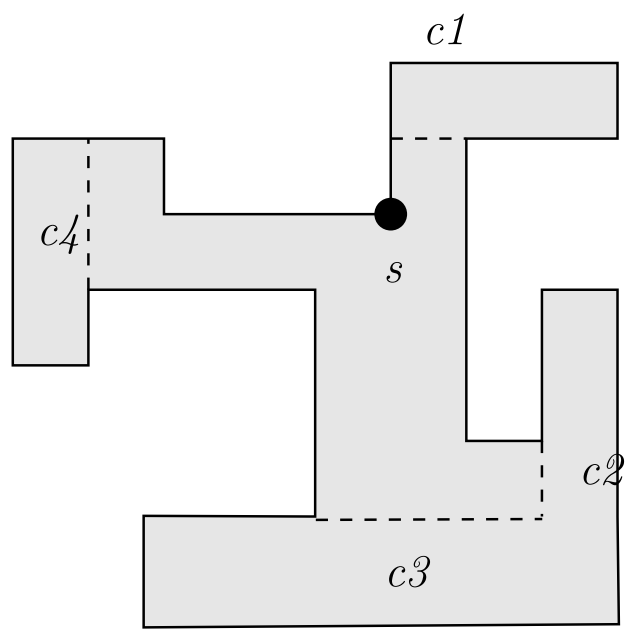




Lemma 1.26 Ordnung entlang des Randes

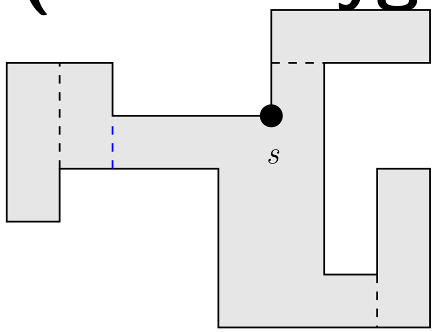
- Rechtwinkeliges Polygon
- Wesentliche Cuts werden nie überschritten!
- SWR besucht Cuts gemäß Ordnung
- Widerspruch! Abkürzung!
- $O(n)$ Algorithmus!!



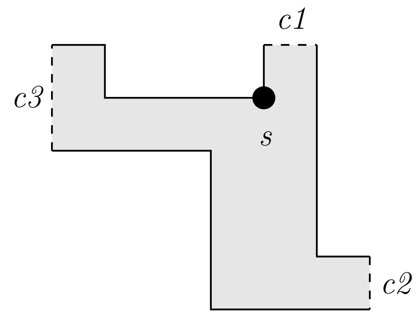


SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$

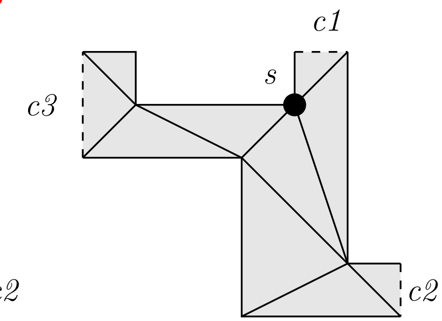
SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



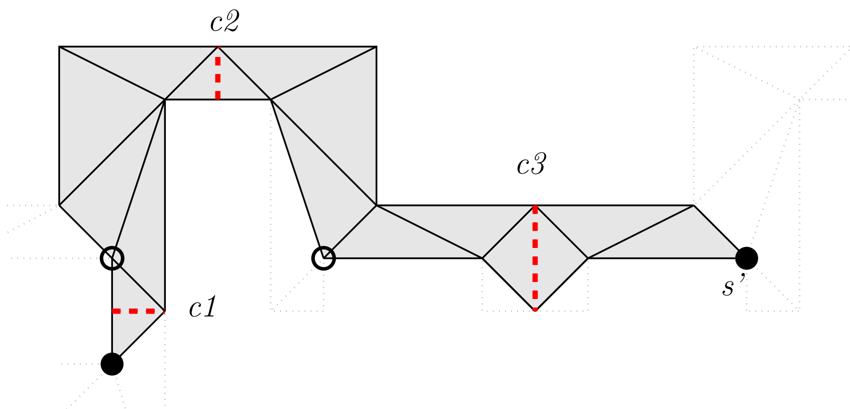
(i) Wesentliche Cuts



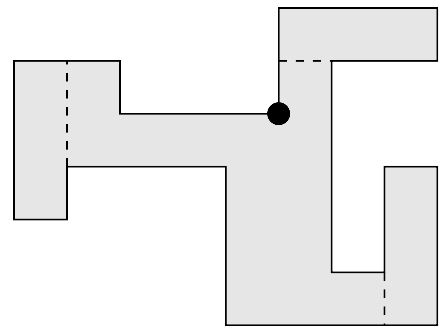
(ii) Abschneiden!



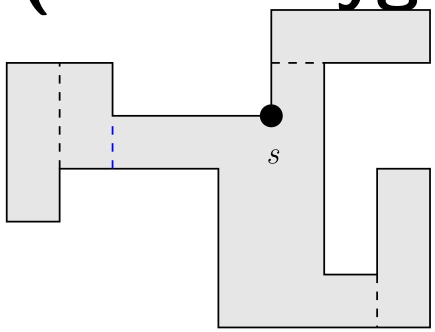
(iii) Triangulation



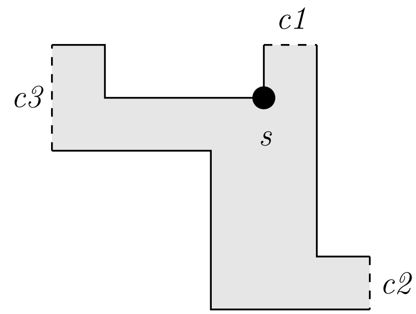
(iv) Spiegeln und Ausrollen!!



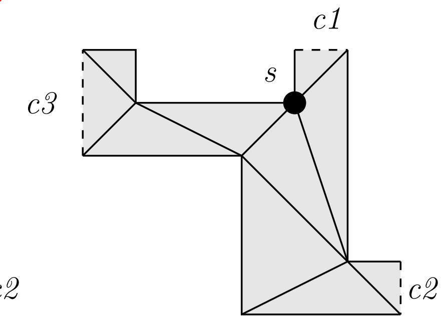
SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



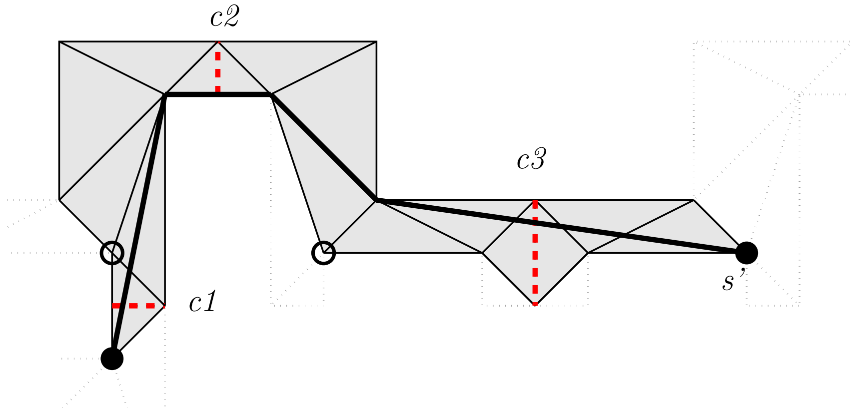
(i) Wesentliche Cuts

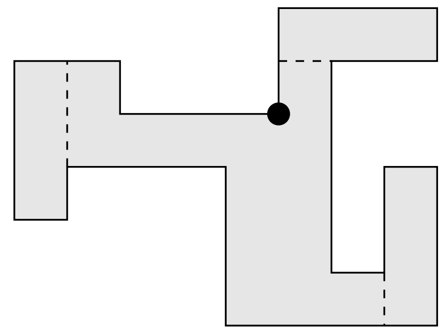


(ii) Abschneiden!



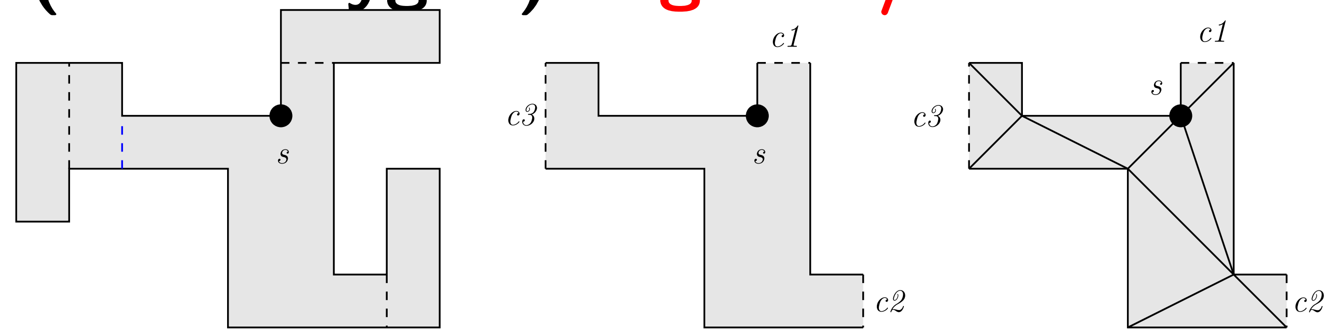
(iii) Triangulation



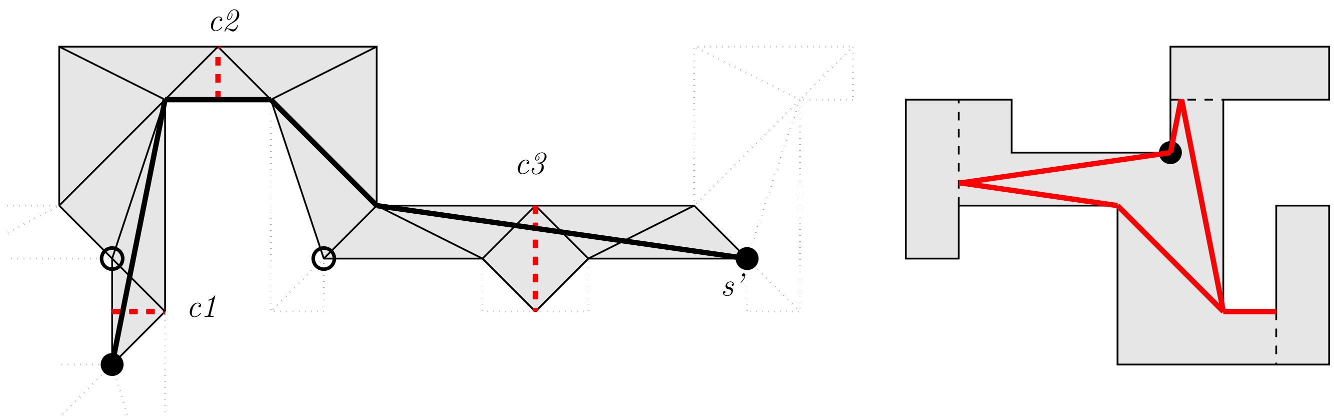


(iv) Spiegeln und Ausrollen!!
(v) Weg berechnen

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



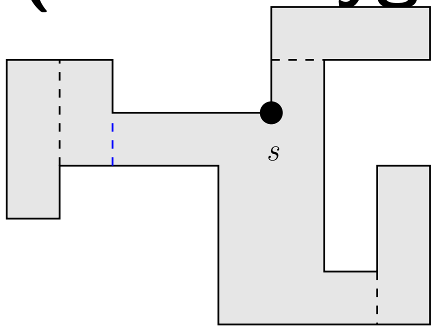
(i) Wesentliche Cuts (ii) Abschneiden! (iii) Triangulation



(iv) Spiegeln und Ausrollen!!
(v) Weg berechnen

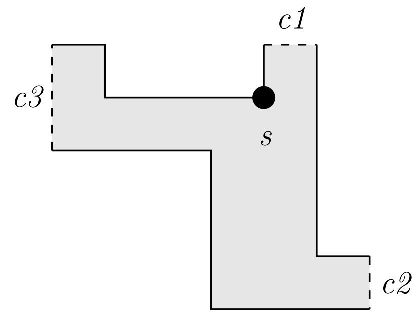
(vi) Zusammenklappen!

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$

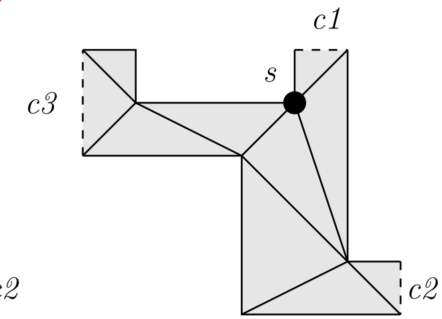


(i) Wesentliche Cuts

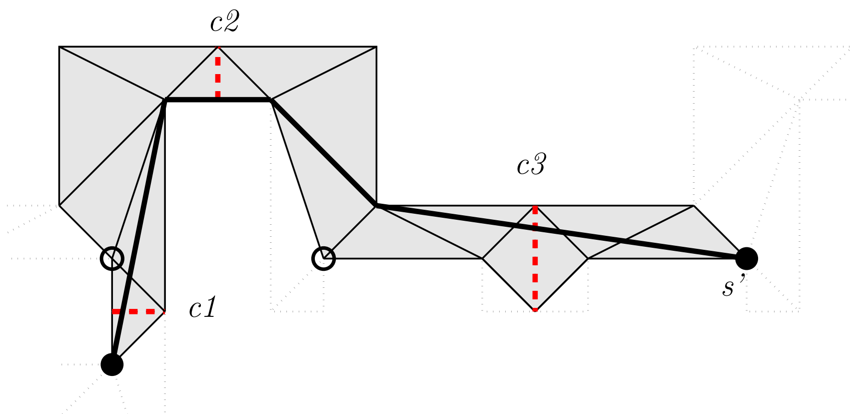
O(n)



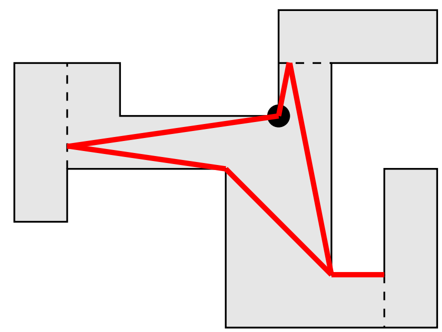
(ii) Abschneiden!



(iii) Triangulation

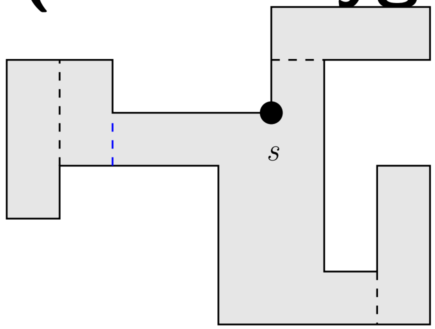


(iv) Spiegeln und Ausrollen!!
(v) Weg berechnen



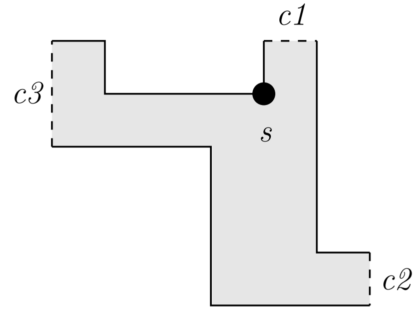
(vi) Zusammenklappen!

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



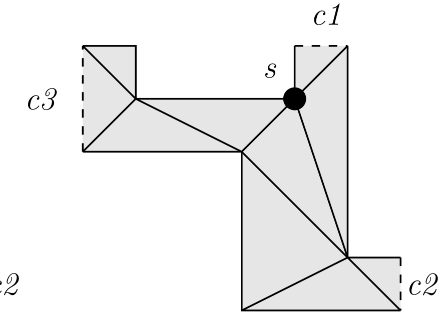
(i) Wesentliche Cuts

O(n)

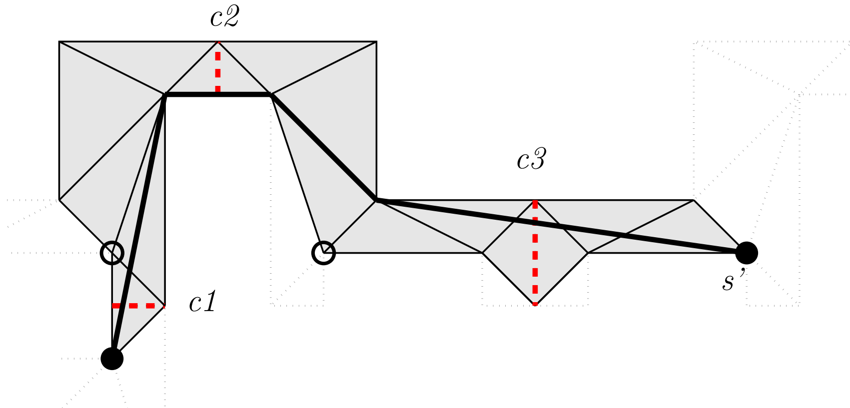


(ii) Abschneiden!

O(n)

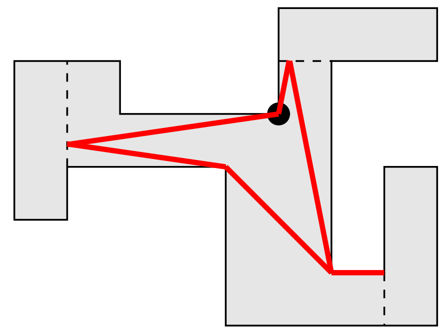


(iii) Triangulation



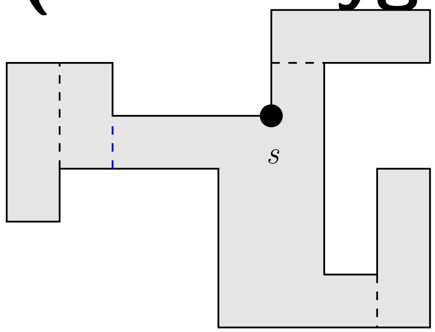
(iv) Spiegeln und Ausrollen!!

(v) Weg berechnen



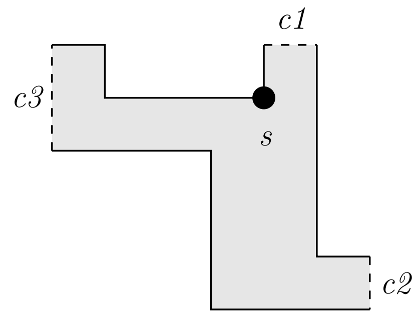
(vi) Zusammenklappen!

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



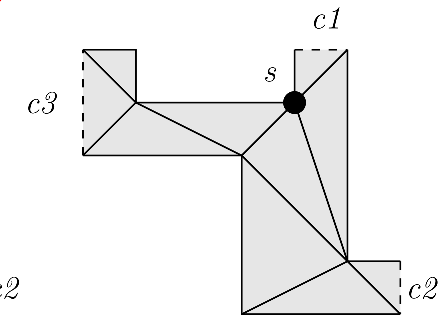
(i) Wesentliche Cuts

O(n)



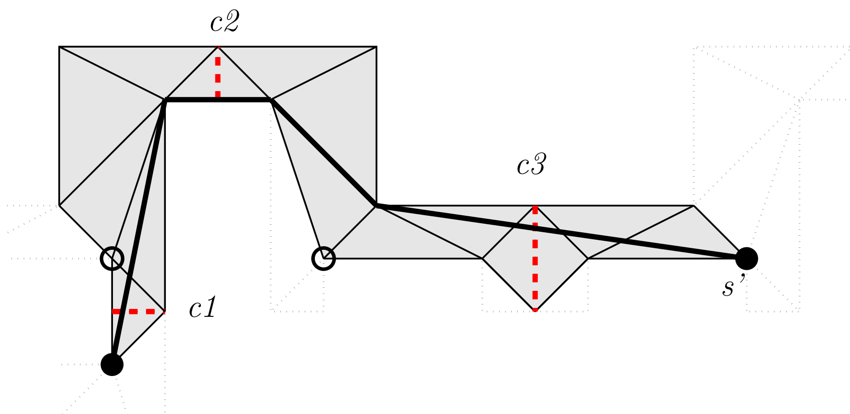
(ii) Abschneiden!

O(n)

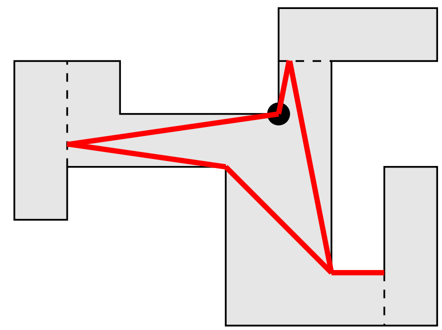


(iii) Triangulation

O(n)

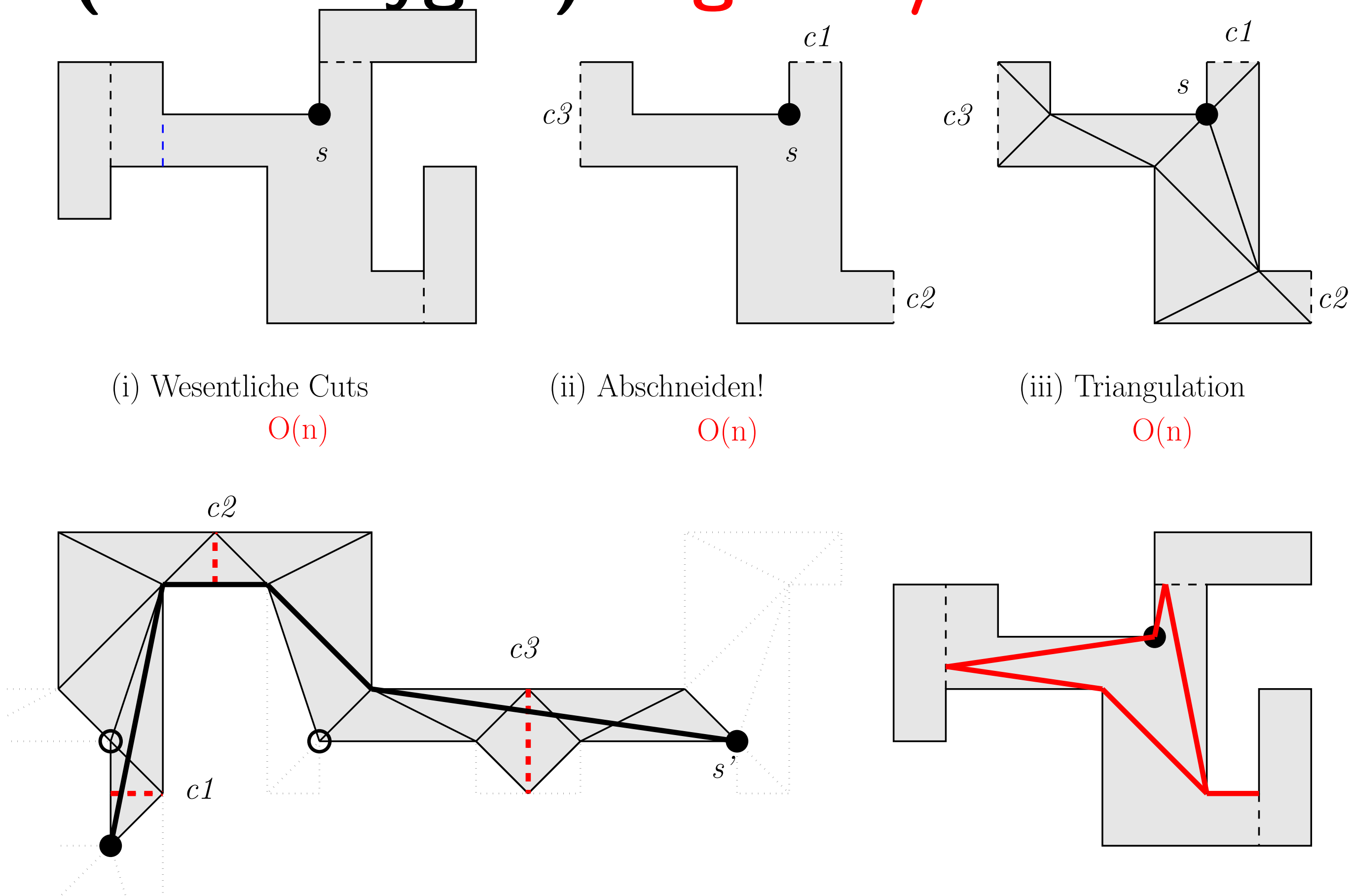


(iv) Spiegeln und Ausrollen!!
(v) Weg berechnen



(vi) Zusammenklappen!

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



(i) Wesentliche Cuts
O(n)

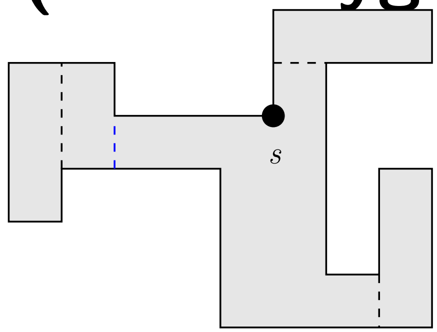
(ii) Abschneiden!
O(n)

(iii) Triangulation
O(n)

(iv) Spiegeln und Ausrollen!!
(v) Weg berechnen
O(n)

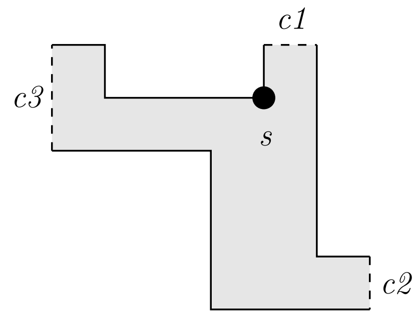
(vi) Zusammenklappen!

SWR (RW Polygon) Alg. 1.9/Th. 1.27: $O(n)$



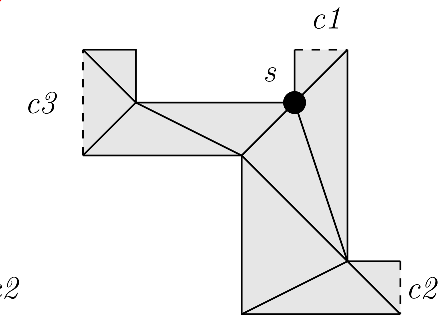
(i) Wesentliche Cuts

O(n)



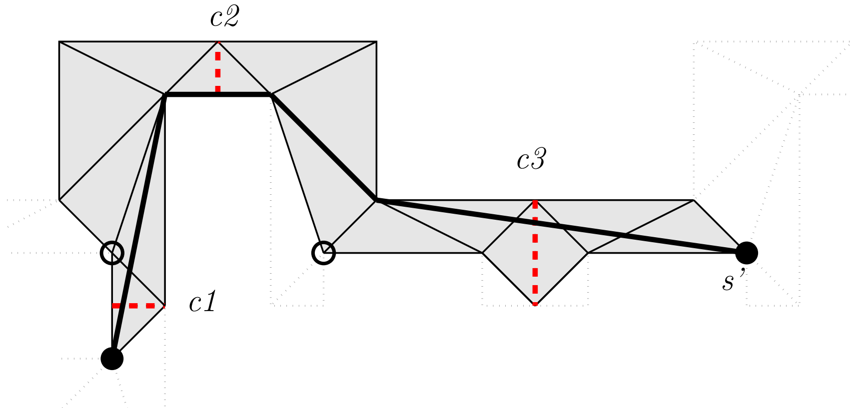
(ii) Abschneiden!

O(n)



(iii) Triangulation

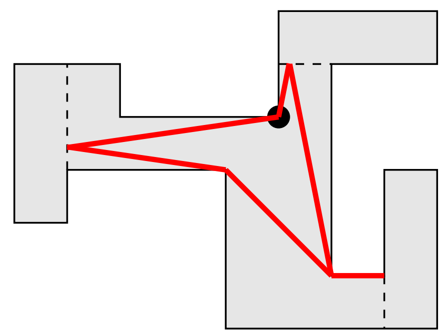
O(n)



(iv) Spiegeln und Ausrollen!!

(v) Weg berechnen

O(n)



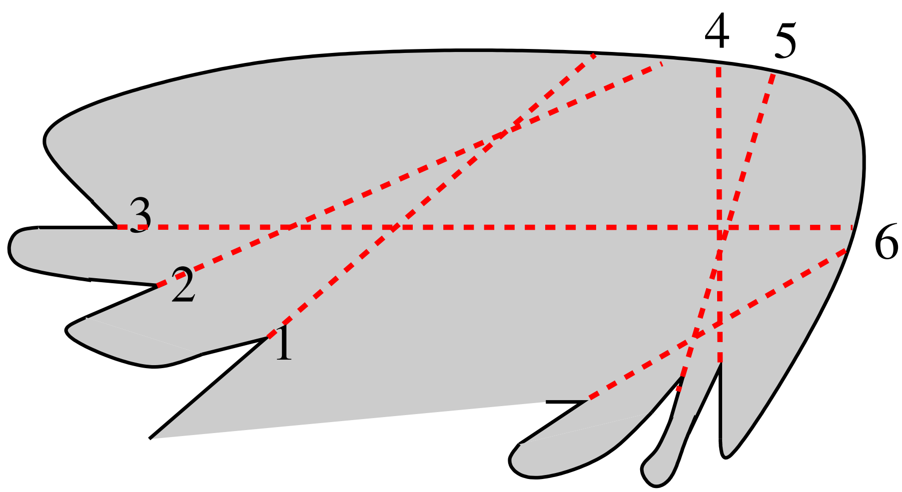
(vi) Zusammenklappen!

O(n)

SWR (Allgemeiner Fall)

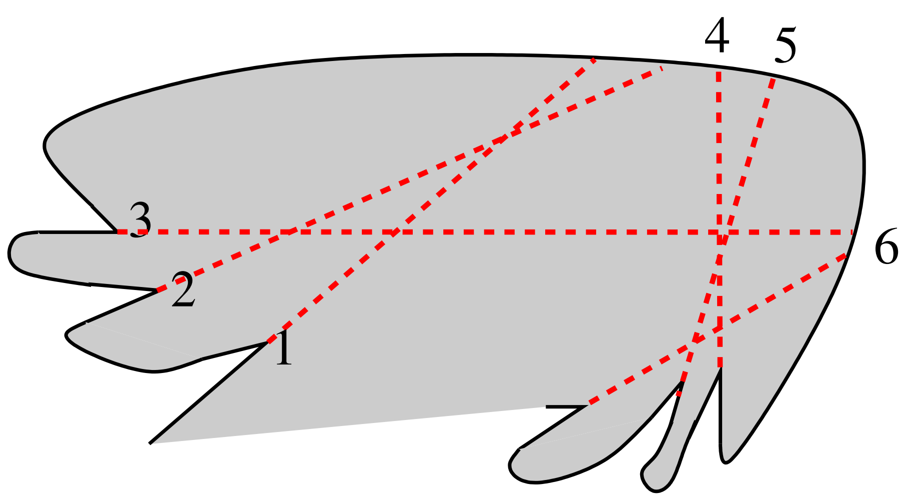
SWR (Allgemeiner Fall)

- Corner Problem!!



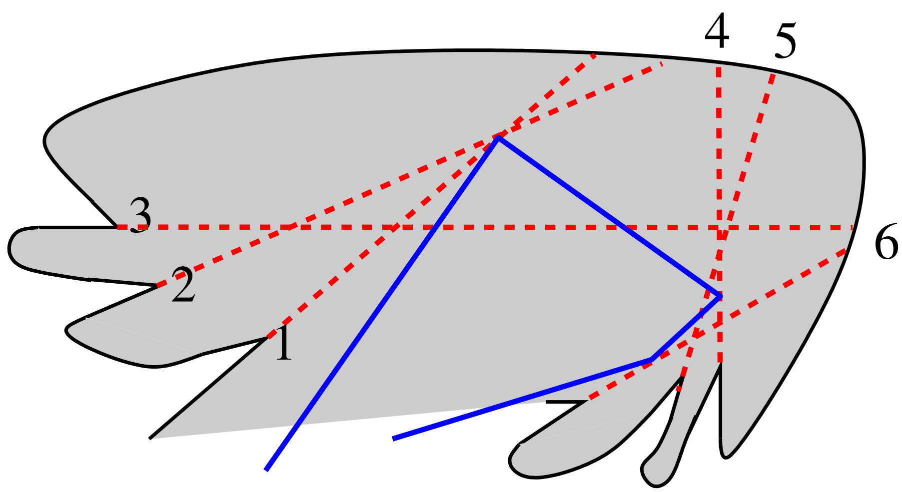
SWR (Allgemeiner Fall)

- Corner Problem!!
- Def. 1.28 Folge wes. Cuts, die sich sukzessive schneiden



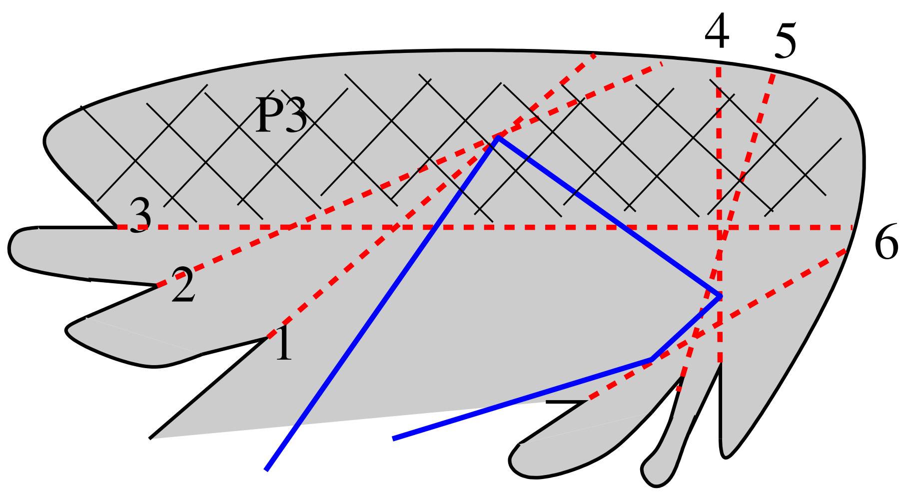
SWR (Allgemeiner Fall)

- Corner Problem!!
- Def. 1.28 Folge wes. Cuts, die sich sukzessive schneiden
- Müssen nicht gemäß Ordnung besucht werden



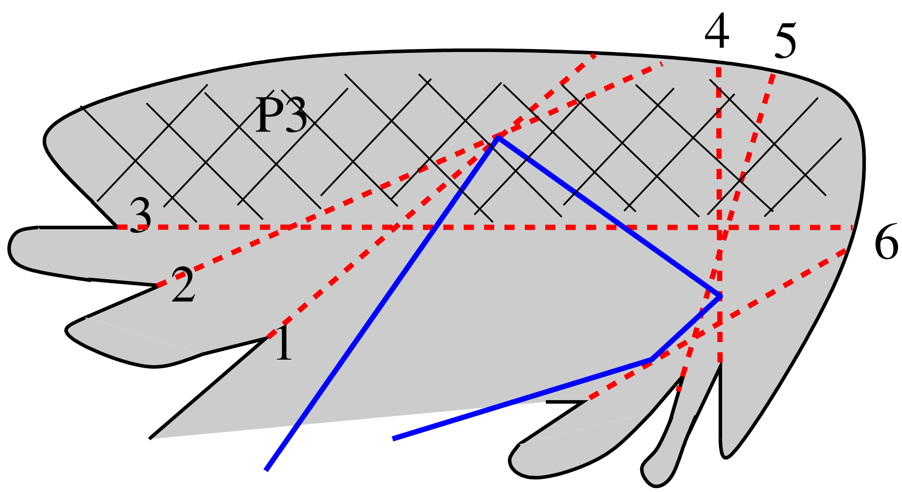
SWR (Allgemeiner Fall)

- Corner Problem!!
- Def. 1.28 Folge wes. Cuts, die sich sukzessive schneiden
- Müssen nicht gemäß Ordnung besucht werden
- Aber die zugehörigen P_{c_i}!!!



SWR (Allgemeiner Fall)

- Corner Problem!!
- Def. 1.28 Folge wes. Cuts, die sich sukzessive schneiden
- Müssen nicht gemäß Ordnung besucht werden
- Aber die zugehörigen P_{c_i}!!!



Lemma 1.29

Lemma 1.29

Die SWR besucht die Corner gemäß der Ordnung entlang des Randes!

Lemma 1.29

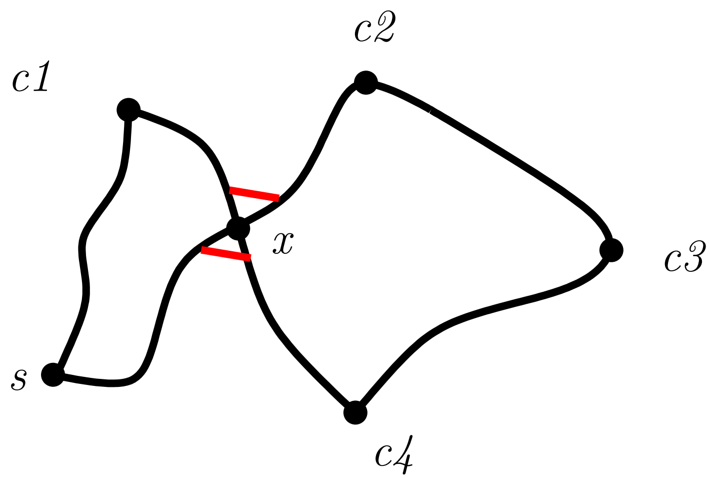
Die SWR besucht die Corner gemäß der Ordnung entlang des Randes!

Beweis: Genauso wie Lemma 1.26!

Lemma 1.29

Die SWR besucht die Corner gemäß der Ordnung entlang des Randes!

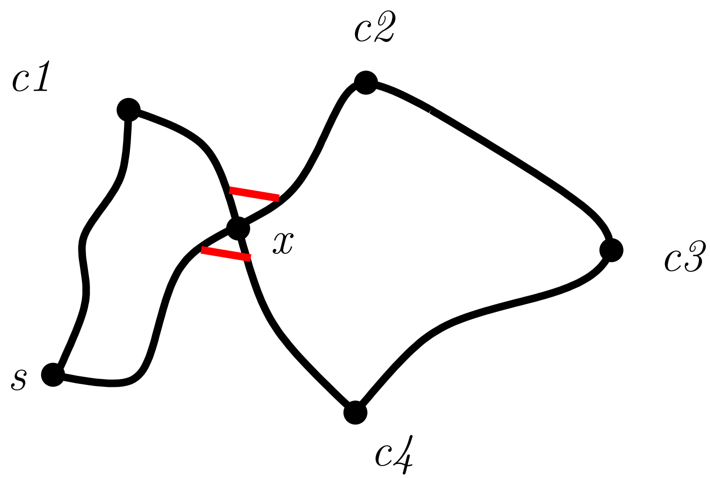
Beweis: Genauso wie Lemma 1.26! Anpassungen im Corner!



Lemma 1.29

Die SWR besucht die Corner gemäß der Ordnung entlang des Randes!

Beweis: Genauso wie Lemma 1.26! Anpassungen im Corner!



Anpassungen innerhalb der Corner: Fehleranfällig!!

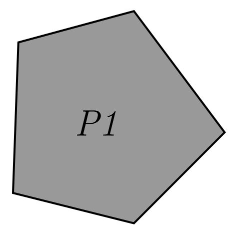
Touring a sequence of polygons (TPP)

Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone

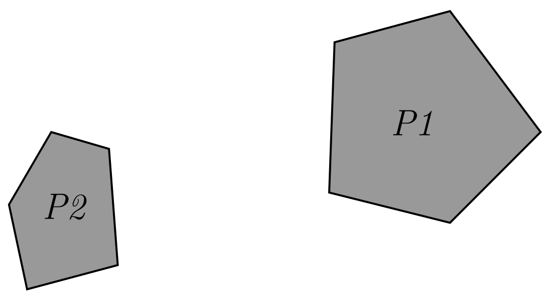
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone



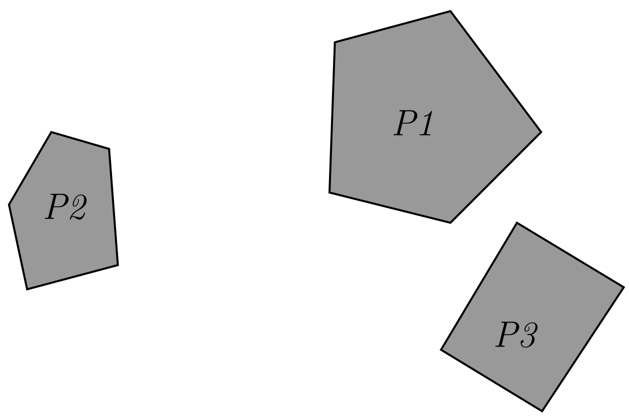
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone



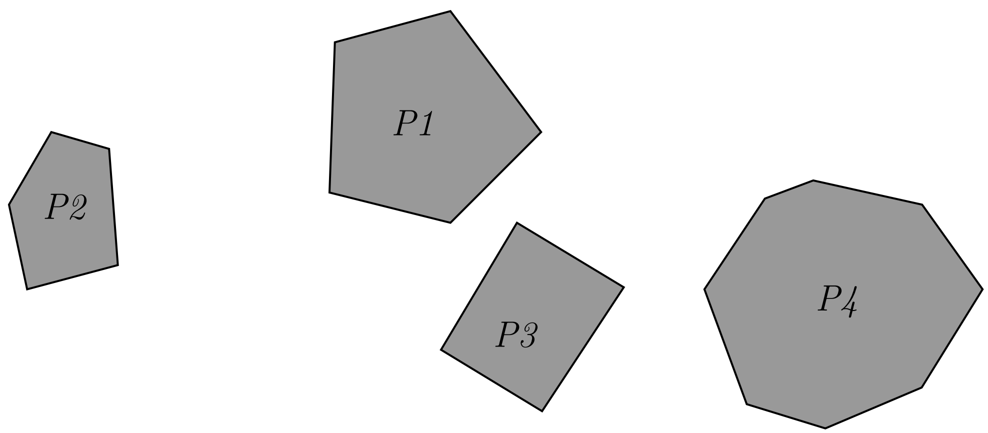
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone



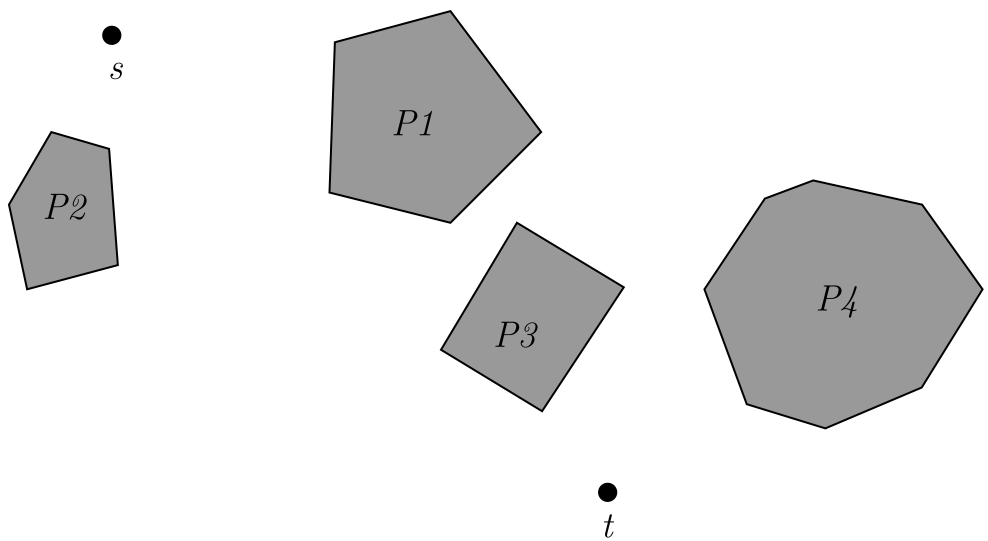
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone



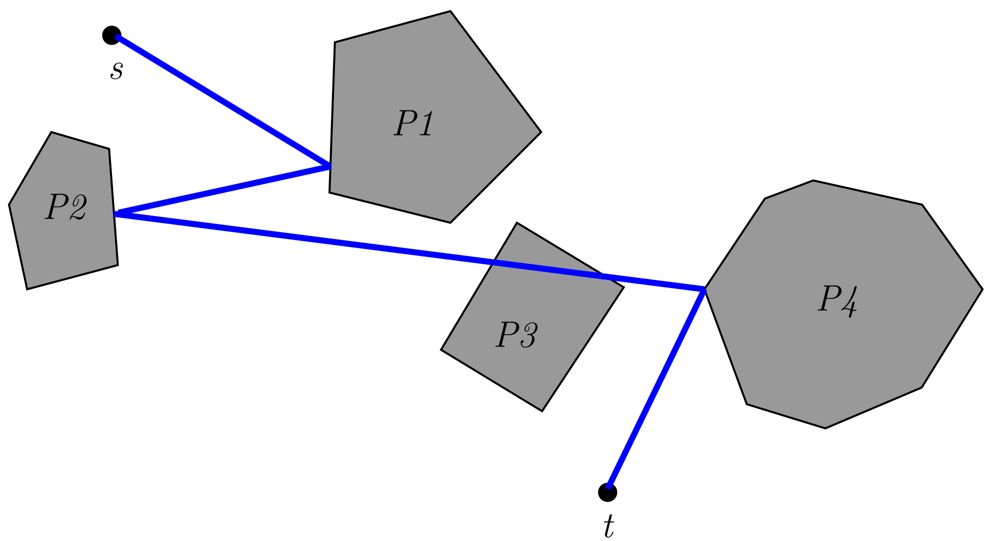
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t



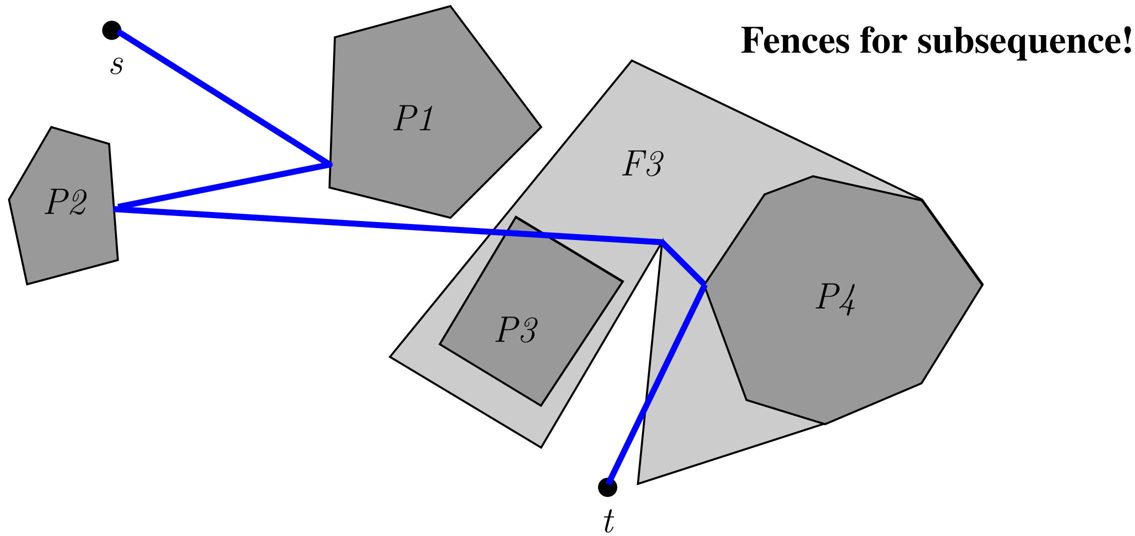
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t
- Besuche Polygone nach geg. Reihenfolge, Shortest Path



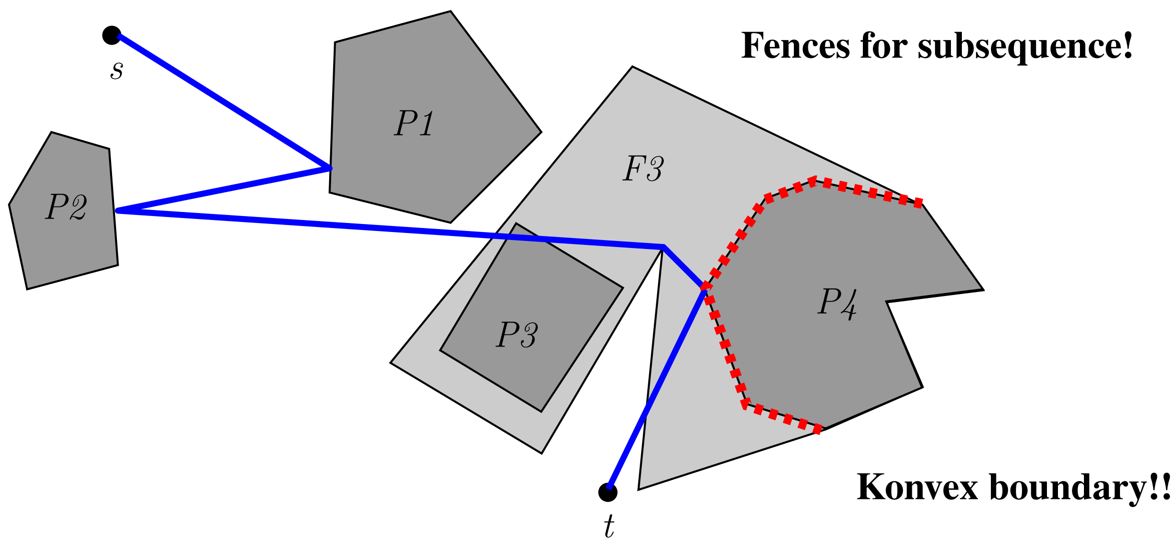
Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t
- Besuche Polygone nach geg. Reihenfolge, Shortest Path



Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t
- Besuche Polygone nach geg. Reihenfolge, Shortest Path



Touring a sequence of polygons (TPP)

- Sequenz konvexer Polygone
- Start s und Ziel t
- Besuche Polygone nach geg. Reihenfolge, Shortest Path