Gemischte Strategie

für Spieler 1 : W'keitsverteilung $(p_i)_i$ über den reinen Strategien, (von Spieler 1)

d.h. für die i-te reine Strategie ein p_i, $0 \le p_i$ mit $\sum p_i = 1$.

für Spieler 2: $(q_j)_j$ entsprechend.

Deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{e}$ für Vektoren

Statt Auszahlung $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} = A$:

erwartete Auszahlung $\sum_{i,j} p_i a_{ij} q_j =: \tilde{A}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}^t A \ldots$

für $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$ (= gemischte Strategien)

Theorem 4.0.6 (v. Neumann / Morgenstern's Minimax-Theorem)

Jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel mit gemischten Strategien hat einen Wert

$$v = \max_{\mathfrak{p}} \min_{\mathfrak{q}} \tilde{A}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \min_{\mathfrak{q}} \max_{\mathfrak{p}} \tilde{A}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$$

Beweis (bei B/E.Y. Benutzung von Brouwers Fixpunktsatz : $f: \underset{\text{kompakt, konvex}}{X} \to X$ stetig hat Fixpunkt)

hier direkter Beweis: Sei $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ gegeben.

Beh 1 Verwendung von max, min ist korrekt (statt sup, inf)

Bew 1 $\mathfrak{p} \in N^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \ge 0 \text{ und } \sum x_i = 1 \right\}$; $\mathfrak{q} \in N^m$

N^m, N^n kompakt, $\tilde{A}: N^n \times N^m \to \mathbb{R}$ stetig.

wichtigster Teil des Beweises:

Beh 2 Es gibt $\mathfrak{q} \in N^m$: $A\mathfrak{q} \le 0$ komponentenweise (erklären)

oder es gibt $\mathfrak{p} \in N^n$: $A^t\mathfrak{p} \ge 0$ — " —

Bew 2 Sei $\mathfrak{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ die j-te Spalte von A, $1 \le j \le m$.

Sei $\mathfrak{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor, $1 \le i \le n$

Sei $C := \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu a_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \mathbb{1}_\nu \; ; \; t_\mu, s_\nu \geq 0, \; \sum t_\mu + \sum s_\nu = 1 \right\}$

die konvexe Hülle von $a_1, \dots, a_m, \mathbb{1}_1, \dots, \mathbb{1}_n$ im $\mathbb{R}^n$.

<u>1. Fall</u> $0 \in C$. $\Rightarrow 0 = \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu a_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \mathbb{1}_\nu$ mit $t_\mu, s_\nu \geq$ [illegible]

schaue in Zeile ν: $\quad \sum t_\mu + \sum s_\nu = 1$

$\underset{\text{Def } a_\mu, \mathbb{1}_\nu}{\Rightarrow} \quad \forall_{1 \leq \nu \leq n} : \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu a_{\nu\mu} = -s_\nu \leq 0$

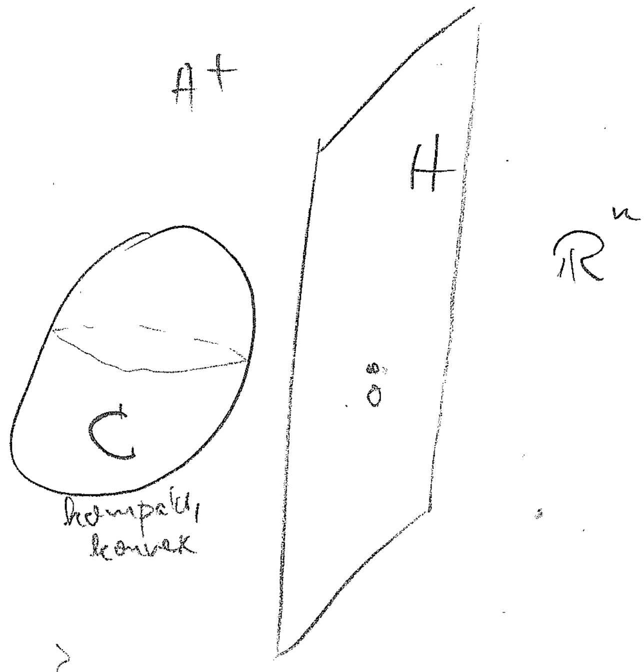
nicht trivi[al]

$\Rightarrow \sum t_\mu$ [illegible]

und

setze $q_j := \dfrac{t_j}{\underbrace{\sum_{j=1}^{m} t_j}_{>0, \text{ da sonst Lin. Komb. der } \mathbb{1}_\nu = 0 \text{ wäre}}} \quad \Rightarrow q := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \in N^m$

$$Aq = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} t_j} \begin{pmatrix} -s_1 \\ \vdots \\ -s_n \end{pmatrix} \leq 0.$$



<u>2. Fall</u> $0 \notin C$:

$\underset{C \text{ konvex}}{\Rightarrow}$ ex. Hyperebene H,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} h_i x_i = 0 \right\},$$

mit $0 \in H$ und $C \subseteq H^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \sum_{i=1}^{n} h_i x_i > 0 \right\}$

Da $\mathbb{1}_\nu \in C \subset H^+$: $\forall \nu : h_\nu > 0 \quad \forall_{1 \leq \nu \leq n}$

Trick! Dafür sind die $\mathbb{1}_\nu$ in C

setze $p_i := \dfrac{h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} \quad \Rightarrow p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in N^n$;

wegen $a_\mu \in C \subset H^+$ ist

$$0 < \sum_{i=1}^{n} h_i a_{i\mu} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m,$$ also auch

(Dividieren durch $\sum_{i=1}^{n} h_i$)

$$0 < \begin{pmatrix} \sum_i a_{i1} p_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{im} p_i \end{pmatrix} = A^t p$$

□ Beh 2

Benötigen noch eine weitere Hilfsaussage: (Loomis' Lemma)

Lemma 4.0.7 (i) $\forall q \in N^m$: $\max_{p \in N^n} \tilde{A}(p,q) = \max_{1 \le i \le n} \tilde{A}(\pi_i, q)$

(ii) $\forall p \in N^n$: $\min_{q \in N^m} \tilde{A}(p,q) = \min_{1 \le j \le m} \tilde{A}(p, \pi_j)$

Bew (i) Sei q beliebig und $p = \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ beliebig $\in N^n$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le n} \tilde{A}(\pi_i, q) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \max_{1 \le i \le n} \tilde{A}(\pi_i, q) \ge \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \tilde{A}(\pi_\nu, q) = \tilde{A}(p, q)$$

(da $\sum p_\nu = 1$) da $\tilde{A}$ bilinear

$\underset{p \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ $\max_{1 \le i \le n} \tilde{A}(\pi_i, q) \ge \max_{p} \tilde{A}(p,q)$

„$\le$" trivial.

(Gegen eine dem Gegner bekannte randomisierte Strat. kann dieser mit einer reinen kont[ern])

(ii) analog (i). □

Damit wird jetzt Theorem 4.0.6 folgendermaßen bewiesen:

$$\underbrace{\max_{p} \min_{q} \tilde{A}(p,q)}_{=: V_1} \le \underbrace{\min_{q} \max_{p} \tilde{A}(p,q)}_{=: V_2}$$

ist ohnehin klar (wie für reine Strategien, Lemma 4.0.2).

Angenommen, in Bed. 2 gilt: $\exists q \in N^m: \quad Aq \le 0$

$$\Rightarrow \quad \forall i,\ 1 \le i \le n: \quad \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j}_{\tilde{A}(\pi_i, q)} \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \max_p \tilde{A}(p,q) \underset{(4.0.7)}{=} \max_i \tilde{A}(\pi_i, q) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad V_1 \underset{\text{stets}}{\le} V_2 = \min_q \max_p \tilde{A}(p,q) \le 0.$$

Angenommen, in Bed. 2 gilt: $\exists p \in N^n: \quad A^t p \ge 0$

$$\Rightarrow \quad \forall j,\ 1 \le j \le m: \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}}_{\tilde{A}(p, \pi_j)} \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad \min_q \tilde{A}(p,q) \underset{(4.0.7)}{=} \min_j \tilde{A}(p, \pi_j) \ge 0$$

$$\Rightarrow$$

$$0 \le \max_p \min_q \tilde{A}(p,q) = V_1 \underset{\text{stets}}{\le} V_2$$

Also nie: $\quad V_1 < 0 < V_2$!

Ersetze jedes a_{ij} in A durch $a_{ij} + w$, w beliebig $\in \mathbb{R}$;
sei B die so entstehende Matrix.

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix}\forall p \in N^n \\ \forall q \in N^m\end{matrix} : \quad \tilde{B}(p,q) = p^t B q = \sum_{i,j} p_i (a_{ij} + w) q_j$$

$$= \sum_{i,j} p_i a_{ij} q_j + w \underbrace{\sum_{i,j} p_i q_j}_{= (p_1 + \dots + p_n)(q_1 + \dots + q_m) = 1}$$

Rekapitulation MiniMax - Theorem (4.0.6)

$A \in M_{n \times m}$ - Matrix ; $N^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ;\ x_i \geq 0\ \&\ \sum x_i = 1 \right\}$

$$\min_{x \in N^n} \max_{y \in N^m} \underbrace{x^t A y}_{\displaystyle \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_i a_{ij} y_j = \tilde{A}(x,y)} = \max_{y \in N^m} \min_{x \in N^n} x^t A y =: v$$

besagt für endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiele (mit Auszahlungsmatrix A):

Bei Verwendung gemischter Strategien hat jedes Spiel einen Wert v.

W-Verteilung auf den endlich vielen reinen Strategien.

Gerade gezeigt (für bel. A, jetzt anwenden auf B)

nie

$$V_1(B) < 0 < V_2(B)$$

$$\begin{array}{ccc} V_1(B) & & V_2(B) \\ \| & & \| \\ V_1(A)+w & & V_2(A)+w \end{array}$$

$\Rightarrow$ nie $V_1(A) < -w < V_2(A)$ $\underset{w\text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ nie $V_1(A) < V_2(A)$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

heorem 4.0.8 (volle Version von Loomis' Theorem)

ei Γ ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit Matrix $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

ie Abbildung $f: p \longmapsto \min_q \tilde{A}(p,q)$ habe Maximum in p^*

$g: q \longmapsto \max_p \tilde{A}(p,q)$ habe Minimum in q^*

ann ist (p^*,q^*) ein Sattelpunkt (vgl. Anfang 4.6), und für den Wert v es Spiels gilt

$$v = \tilde{A}(p^*,q^*) = \max_i \tilde{A}(\pi_i, q^*) = \min_j \tilde{A}(p^*, \pi_j)$$

reine Strategien

$$= \min_q \max_i \tilde{A}(\pi_i, q) = \max_p \min_j \tilde{A}(p, \pi_j)$$

eis: Lemmata 4.0.5, 4.0.7 $\square$

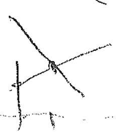
$\hookrightarrow$ 50.0

nwendung:

eispiel $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hier ist $\max_i \min_j a_{ij} = 2 < 3 = \min_j \max_i a_{ij}$

eler 1 wähle erste Zeile mit W'keit $p = p_1$
zweite " " $1-p = p_2$; $p = (p_1, p_2)$

$$v = \max_p \min_j \underbrace{\tilde{A}(p,\pi_j)}_{\sum_i p_i a_{ij}} = \max_p \min\Big(\underbrace{p\cdot 3 + (1-p)\cdot 2}_{p+2}, \underbrace{p\cdot 1 + (1-p)\cdot 4}_{4-3p}\Big)$$



$\Leftrightarrow$ $p+2 = 4-3p$
$p = \frac{1}{2}$

Mache klarer:

Würfeln bei Mensch-Ärgere-Dich-Nicht
(= dritter Spieler)

$\neq$ Wahl einer gemischten Strategie

Nash vs Koop.

Auktionen, Mechanism design

in Analogie zur Definition im reinen Fall:

(p^*, q^*) heißt (gemischter) Sattelpunkt von A, falls gilt:

$$\tilde{A}(p^*, q^*) = \max_p \tilde{A}(p, q^*) = \min_q \tilde{A}(p^*, q).$$

<u>Beweis von Theorem 4.0.8</u> Sei (p^*, q^*) wie definiert.

Dann ist (p^*, q^*) ein Sattelpunkt, denn

$$\forall p: \quad \tilde{A}(p, q^*) \leq \max_p \tilde{A}(p, q^*) \underset{\text{Def } q^*}{=} \min_q \max_p \tilde{A}(p, q) = v =$$

$$\underset{\text{v. Neumann}}{=} \max_p \min_q \tilde{A}(p, q) \underset{\text{Def } p^*}{=} \min_q \tilde{A}(p^*, q)$$

$$\leq \tilde{A}(p^*, q^*)$$

$$\Rightarrow \max_p \tilde{A}(p, q^*) = \tilde{A}(p^*, q^*)$$

(wie Beweis 4.0.5)

<u>Ebenso:</u> $\min_q \tilde{A}(p^*, q) = \tilde{A}(p^*, q^*)$

Damit auch gezeigt: $\tilde{A}(p^*, q^*) = v.$

Ferner:

$$\min_q \max_i \tilde{A}(\pi_i, q) \underset{\text{triv.}}{\leq} \max_i \tilde{A}(\pi_i, q^*) \underset{\text{triv.}}{\leq} \max_p \tilde{A}(p, q^*) \underset{\text{Def } q^*}{\leq} \max_p \tilde{A}(p, q) \quad \forall q$$

$$\min_q \max_i \tilde{A}(\pi_i, q) \leq \overbrace{\underbrace{\min_q \max_p \tilde{A}(p, q)}_{= v} = \min_q \max_i \tilde{A}(\pi_i, q)}^{\text{Lemma 4.0.7}}.$$

$\square$

$$\max_p \min_j \tilde{A}(p,\pi_j) \underset{\text{triv}}{\geq} \min_j \tilde{A}(p^*,\pi_j) \underset{\text{triv}}{\geq} \min_q \tilde{A}(p^*,q)$$

$$\underset{\text{Def } p^*}{\geq} \min_q \tilde{A}(p,q) \quad \forall p$$

$$\Rightarrow \max_p \min_j \tilde{A}(p,\pi_j) \geq \max_p \underbrace{\min_q \tilde{A}(p,q)} = v$$

$$\max_p \overbrace{\min_j \tilde{A}(p,\pi_j)}^{\shortparallel}$$

$$\Big\} \Rightarrow \max_p \min_j \tilde{A}(p,\pi_j) = v.$$

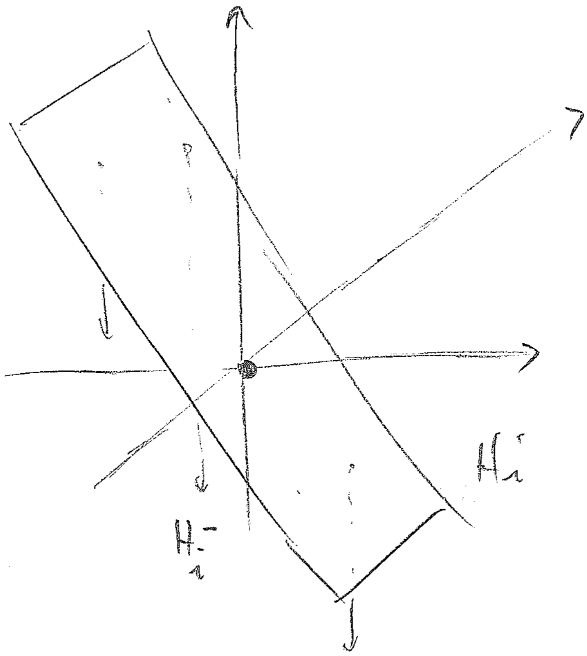
$\exists q \quad Aq \leq 0$ oder $\exists p: \quad A^t p \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Jede Zeile i definiert Hyperebene H_i im $\mathbb{R}^m$

$$H_i := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \; ; \quad a_{i1} x_1 + \dots + a_{im} x_m = 0 \right\}$$

H_i^- unterer Halbraum, abgeschlossen — " — ≤ 0



$\exists q: \; Aq \leq 0$

$\iff \bigcap_{i=1}^{n} H_i^- \neq \emptyset$

$\Rightarrow \quad v = \frac{5}{2}$ durch Einsetzen von $p = \frac{1}{2}$ in eine der beiden Geradengleichungen

- Spieler 1 hat optimale gemischte Strategie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, die v garantiert.
  Wenn Spieler 2 wüßte, daß Spieler 1 diese Strategie wählt, könnte er mit jeder seiner reinen Strategien dagegenhalten.
- Da er das aber nicht weiß, kann er sich nicht leisten, z.B. Spalte 1 zu wählen (dann könnte Spieler 1 3 erzielen)

$\Rightarrow$ auch Spieler 2 sollte gemischte Strategie verwenden:

erste Spalte mit W'keit q
zweite " " $1-q$

$$\underset{4.0.8}{\Rightarrow} \quad v = \min_q \max\Big(\underbrace{3q + 1\cdot(1-q)}_{2q+1}, \ \underbrace{2q + 4\cdot(1-q)}_{4-2q}\Big)$$

wird erreicht für $2q+1 = 4-2q$, also $q = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ ist optimale gemischte Strategie für Spieler 2.

Leider gilt v. Neumanns Theorem nicht für beliebige unendliche Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele:

Beispiel 4.0.10 Spieler 1 wählt $i \in \mathbb{N}$, Spieler 2 $j \in \mathbb{N}$ } unabhängig
Wer größere Zahl wählt, gewinnt

Auszahlung für Spieler 1:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i > j \\ 0, & \text{falls } i = j \\ -1, & \text{falls } i < j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diskrete W'verteilung

Strategie für Spieler 1: Folge $p = p_1, p_2, p_3, \ldots$ mit $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$\Rightarrow$ Konv. v. Reihen: $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon : \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} p_i < \varepsilon$.

$\Rightarrow \quad \sup_p \inf_j \tilde{A}(p, \pi_j) = -1$, denn:

für jedes feste p ist $\tilde{A}(p, \pi_j) = -1 \cdot \sum_{k=1}^{j-1} p_k + 1 \cdot \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k \xrightarrow{} -1$ für $j \uparrow \infty$.

Andererseits ist aber für jede gemischte Strategie $q = q_1, q_2, \ldots$ vom Spieler 2

$$\inf_q \sup_i \tilde{A}(r_i, q) = 1, \quad \text{denn}$$

für jedes q ist $\tilde{A}(r_i, q) = 1 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} q_k + (-1) \sum_{k=i+1} q_k \quad \uparrow$ für $i \uparrow \infty$.

Bem $n > 2$ – Personen-Spiele sind viel komplizierter (Koalitionen!)

Damit zurück zur Online-Analyse. Wir definieren zunächst ein Modell, das den Zwei-Personen-Nullsummenspielen ~~recht~~ ähnlich sieht:

Ähnlichkeit zu Spielen.

Programm: 3 abstrakte Modelle

Anforderungs-Antwort-Syst.
Metrische Task-Systeme
k-Server-Systeme

.1 Anforderungs-Antwort-Systeme

Gegeben seien: Anforderungsmenge R
Folge endlicher Antwortmengen A_i, $i = 1, 2, \ldots$
Definition 4.1.1 Folge von Funktionen $cost_n : R^n \times A_1 \times \ldots \times A_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

Dann heißt $\gamma = (R, (A_i)_i, cost_i)$ ein Anforderungs-Antwort-System.

Idee Abwechselnd stellt Gegner ADV an ALG eine Anforderung r_i
beantwortet ALG die Anforderung r_i
mit Antwort (Aktion, Handlung) a_i