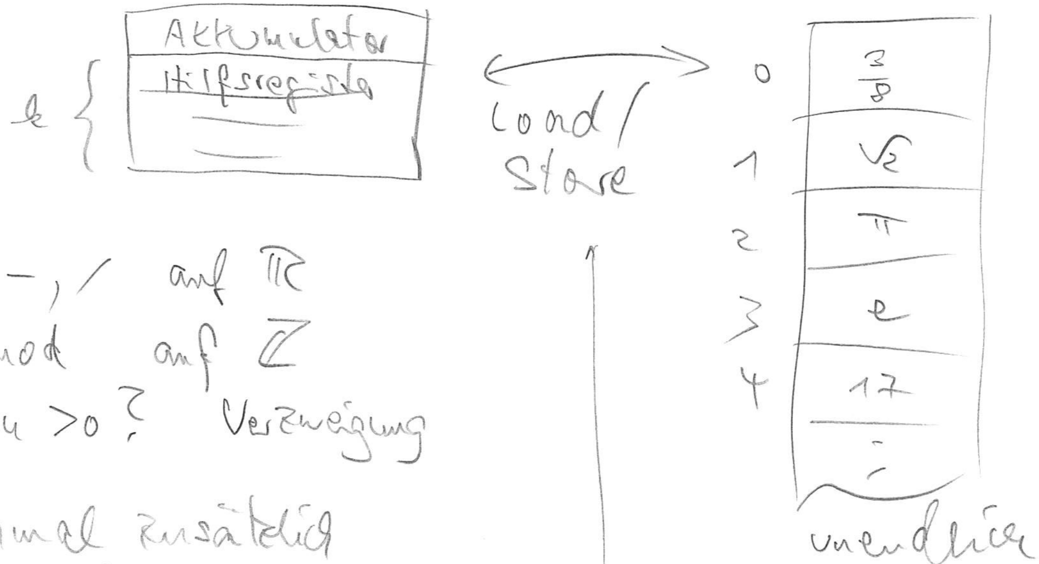
AlgGeo 2.1

Beim letzten Mal: dichtester Abstand von $n$ Punkten im $\mathbb{R}^2$

Sweep: $O(n \log n)$

"Eine Raumdimension wird zur Zeitdimension".

Rechnermodell: REAL RAM (random access machine)




in jeder Speicherzelle eine reelle Zahl

bei realem Rechner: jede Speicherzelle enthält Wort fester Länge

$+, \cdot, -, /$ auf $\mathbb{R}$

div, mod auf $\mathbb{Z}$

Akku $> 0$ ? Verzweigung

manchmal zusätzlich

sin, cos, $\sqrt{\ }$, trunc

dazusagen

Lade ~~dasjenige~~ den Inhalt derjenigen Zelle in den Akku, dessen Index in Zelle 4 steht

AlgGeo 2.2

Laufzeit alle Operationen $+, \cdot, -, /,$ div, mod

$\sqrt{\ }$, sin, cos, trunc, LOAD, STORE : 1 Schritt

worst-case)

(Laufzeit eines Algorithmus $A$ auf einer REAL RAM:
max. Anzahl der Schritte in Abhängigkeit von Inputgröße

asymptotisch in Abhängigkeit von $n$

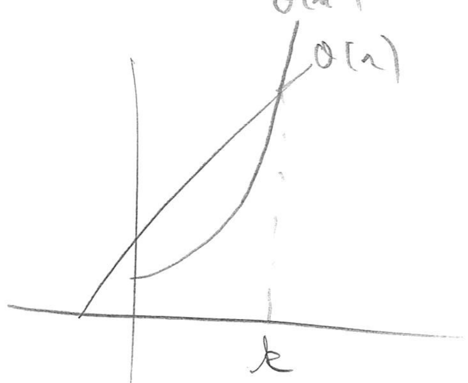
O-Notation: $O(f) := \{g;\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists C > 0\ \forall n \geq n_0 : g(n) \leq C \cdot f(n)\}$

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$g \in \Omega(f) :\Leftrightarrow f \in O(g)$

$\Theta(f) := O(f) \cap \Omega(f)$

Bsp $\quad 17 \cdot n^4 - \underbrace{?^3 \cdot \log\log n}_{O(n^?)} + \sqrt{n} - \sin n + 1 \in \Theta(n^4)$




bis $k$ wäre der $O(n^2)$-Algorithmus besser als der lineare

AlgGeo 2.3

Closest Pair: $O(n \log n)$ Frage: Geht es vielleicht besser?

## 1.2.5 Untere Schranken

Sortieren durch Schlüsselvergleiche

Gegeben: Objekte $q_1, \ldots, q_n$ aus einer geordneten Menge $Q$; paarweise verschieden

Aufgabe: Finde Permutation $\pi$, so daß $q_{\pi(1)} < q_{\pi(2)} < \ldots < q_{\pi(n)}$

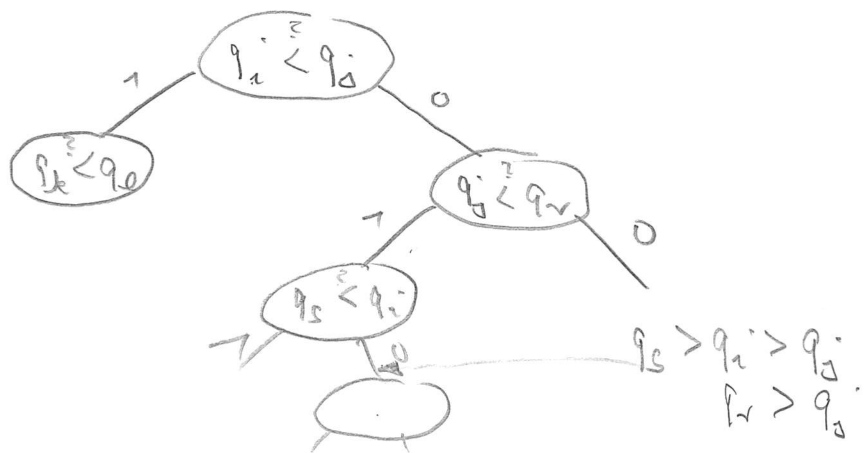
Vergleichsfunktion $K$ mit $K(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } q_i < q_j \\ 0, & \text{falls } q_i > q_j \end{cases}$

"Orakel"

**Theorem 1.4** Sortieren mit Schlüsselvergleichen hat Komplexität $\Omega(n \log n)$

**Beweis** Sei $A$ ein Algorithmus zum Sortieren mit Schlüsselvergleichen.
Sei $A$ deterministisch.

Entscheidungsbaum $T$
von Algorithmus $A$



AlgGeo 2.4

□ . . . □ . . . □ Blätter von T

Input kann auf $n!$ Arten "durcheinander" sein
‖ Anzahl der Permutationen von $n$ Objekten

Für jedes Blatt $b$ von $T$ gibt es <u>nur eine</u> Permutation, ~~deren Input~~ $\pi$ ~~in Blatt b~~
für die $A$ im Blatt $b$ endet, weil $A$ korrekt ist

jede Permutation muß vorkommen, weil $A$ vollständig ist

$$\text{Blätter} \longrightarrow \text{Permutationen} \quad \text{ist } \underline{\text{surjektiv}}$$
$$b \longmapsto \pi, \text{ der Inputs unter } A \text{ in Blatt } b \text{ enden}$$

$$\Rightarrow \quad \#\,\text{Blätter} \geq \#\,\text{Permutationen} = n!$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\text{Höhe}(T)}_{\substack{= \\ \text{max Anzahl} \\ \text{von Tests von } A}} \underset{T \text{ binär}}{\geq} \log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right) \in \Theta(n \log n)$$

$$\underset{n \text{ gerade}}{n!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \ldots \cdot n}_{\substack{\geq \frac{n}{2} \text{ viele Faktoren} \\ \text{der Größe } \geq \frac{n}{2}}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{\text{Stirling: } n! \sim \sqrt{2\pi n}\, \frac{n^n}{e^n}}$$

□

Alg Geo 2.5

Wenn die Inputobjekte $x_1,\dots,x_n$ reelle Zahlen sind?

Lineares Modell: statt $x_i \overset{?}{<} x_j$: $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n+d \overset{?}{<} 0$

mit vom Algorithmus gewählten Zahlen $c_1,\dots,c_n,d \in \mathbb{R}$

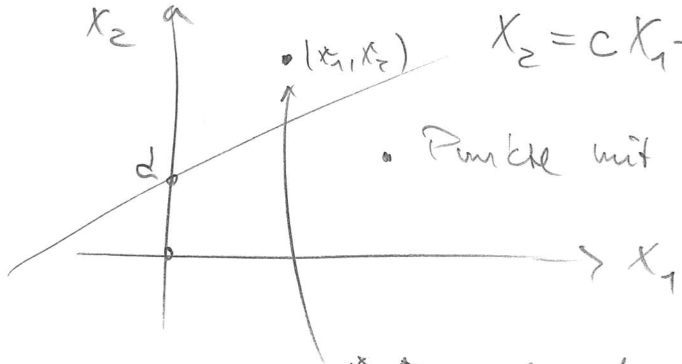
Verallgemeinerung, denn:

$$1\cdot x_i - 1\cdot x_j \overset{?}{<} 0 \iff x_i \overset{?}{<} x_j$$

Schreibweise: $h(X_1,\dots,X_n) := c_1X_1+c_2X_2+\dots+c_nX_n+d$

Tests $h(x_1,\dots,x_n) \overset{?}{<} 0$

Beispiel $n=2$




$X_2 = cX_1+d$ $\qquad h(X_1,X_2) := cX_1 - X_2 + d$

• Punkte mit $h(x_1,x_2) > 0$

$x_2 > cx_1+d$, $\quad h(x_1,x_2) < 0$

Wir sehen: Die Punkte $(x_1,x_2)$ mit $h(x_1,x_2)=0$ bilden Gerade

$h(x_1,x_2) \begin{matrix} <0 \\ >0 \end{matrix}$ bilden (offenen Halbraum) offene Halbebene

$\begin{matrix} \le 0 \\ \ge 0 \end{matrix}$ abgeschlossene Halbebene

AlgGeo 2.6

Dimension n beliebig: $h(x_1,\dots,x_n) < 0$: offener Halbraum ] **Konvex**

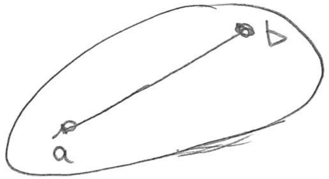
$\geq 0$: abgeschlossener Halbraum ]

$= 0$: Hyperebene

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex $:\Longleftrightarrow$ $\forall a,b \in M$: $\overline{ab} \subseteq M$

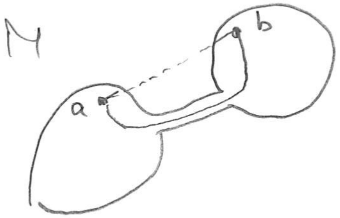
↑ Liniensegment, Strecke von a nach b

M




konvex

M




nicht konvex

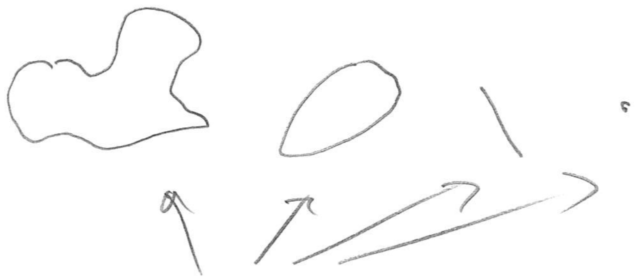
aber wegzusammenhängend

Def: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend $:\Longleftrightarrow$

$\forall a,b \in M$ gibt es Weg von a nach b in M

$f: [0,1] \longrightarrow M$ stetig mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$

M:



besteht aus 4 wegzusammenhängenden Bestandteilen: Wegzusammenhangskomponenten von M

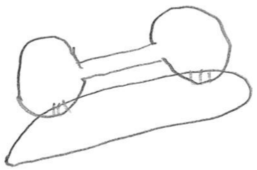
abstrakt: Auf M Äquivalenzrelation

$a,b \in M$: $a \sim b$ $:\Longleftrightarrow$ es gibt Weg in M von a nach b

Wegzusammenhangskomponenten = Äquivalenzklassen

AlgGeo 2.7

<u>Klar:</u> Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex
(gilt für wegzusammenhängend i.a. nicht:



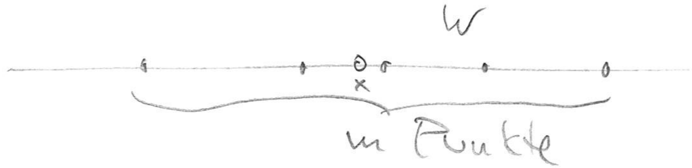
Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Elementtest für W:

Gegeben: $x \in \mathbb{R}^n$

Frage: $x \overset{?}{\in} W$

<u>Theorem 1.5</u> $W \subseteq \mathbb{R}^n$ habe m Wegzusammenhangskomponenten.
Dann hat Elementtest für W im linearen Modell Komplexität $\Omega(\log m)$

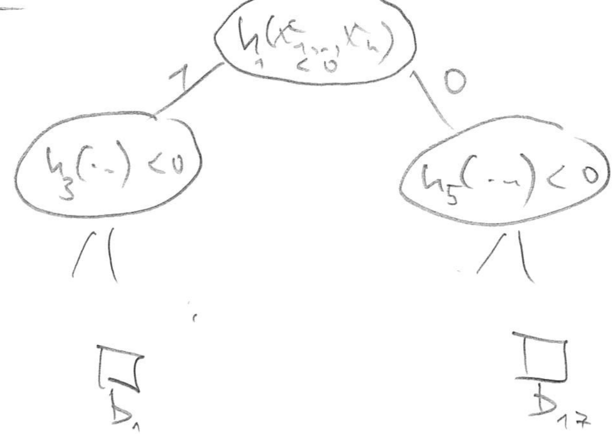
Reality Check: $n = 1$




Elementtest durch binäre Suche in $O(\log m)$

<u>Beweis</u> Sei A ein (det.) Alg. für Elementtest auf W im linearen Modell

T




sei Entscheidungsbaum für Algorithmus A

AlgGeo 2.8

für jedes Blatt $b$ von $T$: $A_b := \{\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n;$ A terminiert bei Eingabe von $\vec{x}$ in Blatt $b\}$

$A_b$ ist Durchschnitt von (endlich vielen) offenen oder abgeschlossenen Halbräumen $\Rightarrow$ $A_b$ konvex $\Rightarrow$ $A_b$ wegzusammenhängend

A vollständig $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{b \text{ Blatt}} A_b$

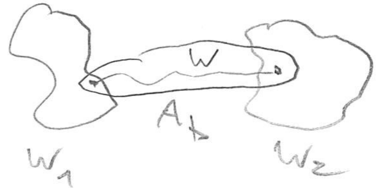
A korrekt $\Rightarrow$ $\forall b$ Blatt: $A_b \subseteq W$ oder $A_b \cap W = \emptyset$

Also:

$$W = \mathbb{R}^n \cap W = \bigcup_{b \text{ Blatt}} (A_b \cap W) = \bigcup_{b \in B} \underbrace{A_b}_{\text{wegzshgd.}}$$

sei $B := \{b \text{ Blatt};\ A_b \subseteq W\}$

klar: Kein $A_b$ mit $b \in B$ kann zwei Zshgkp von $W$ schneiden



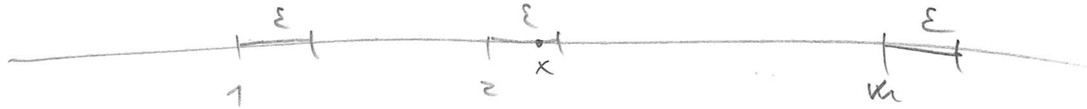

$\lightning$

$\Rightarrow$ jedes $A_b$ ganz in einer Zshgkp $W_i$ von $W$ enthalten sein

$\Rightarrow$ # Blätter von $T \geq |B| \geq$ # Zshgkp $W_i$ von $W = m$

$\Rightarrow$ $\text{Höhe}(T) \geq \log_2 m$. $\square$

Bsp:




$$W := \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} \underbrace{[i, i+\varepsilon]}$$

Zusammenhangs-komponenten von $W$

Alg. für Elementtest für $W$

$$x - \lfloor x \rfloor \leq \varepsilon \iff x \in W \quad ?$$

Kein Widerspruch zu Theorem 1.5, weil $\underset{\text{trunc}}{\lfloor\ \rfloor}$ nicht im linearen Modell!