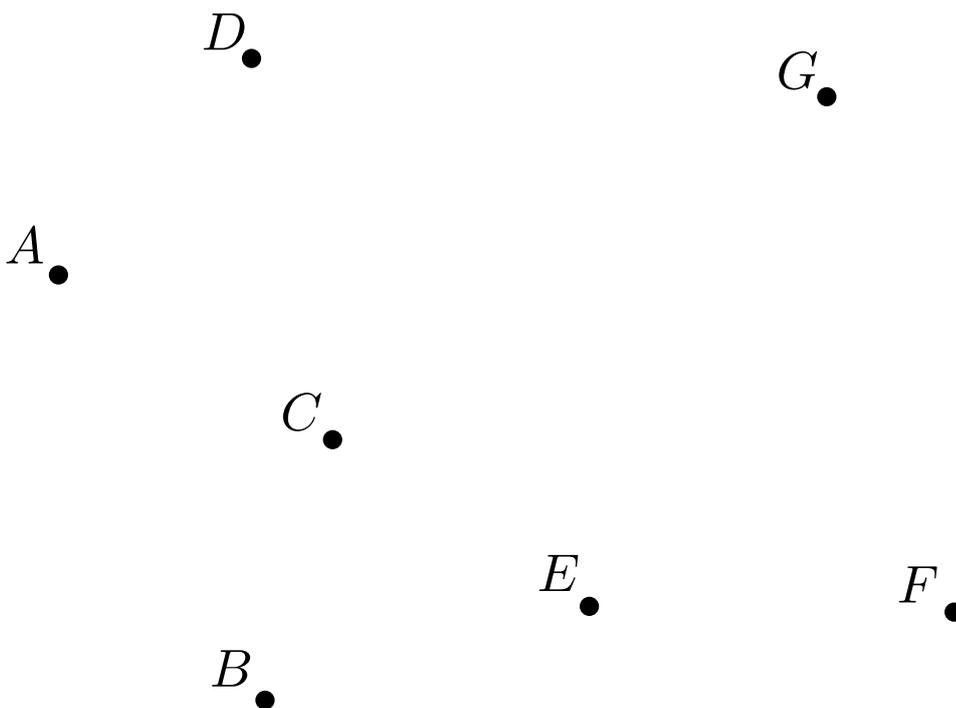


## Übungsblatt 10

### Aufgabe 10.1: Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulation

- Geben Sie das Voronoi-Diagramm, die Delaunay-Triangulierung und den minimalen Spannbaum der abgebildeten Punktmenge an. (Die Delaunay-Triangulierung ist der duale Graph des Voronoi-Diagramms!)
- Betrachten Sie das Voronoi-Diagramm der abgebildeten Punktmenge. Welche Voronoi-Regionen sind zu welchen benachbart, welche sind beschränkt bzw. unbeschränkt?



## Aufgabe 10.2: Komplexität einzelner Voronoi-Regionen

Zeigen Sie, dass zu jedem  $n > 3$  eine Menge von  $n$  Punkten in der Ebene existiert, so dass auf dem Rand einer Voronoi-Region  $n - 1$  Knoten des Voronoi-Diagramms liegen.

## Aufgabe 10.3: Komplexität Voronoi-Diagramme und Triangulationen

Gegeben seien  $n$  Punkte in allgemeiner Lage in der Ebene. Zeigen Sie:

1. Das Voronoi-Diagramm der  $n$  Punkte hat genau  $2n - r - 2$  viele Knoten und  $3n - r - 3$  viele Kanten, wobei  $r$  die Anzahl der Ecken auf der konvexen Hülle der  $n$  Punkte ist.
2. Jede Triangulation der  $n$  Punkte hat genau  $3n - r - 3$  viele Kanten.
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Triangulation von Punkten in der Ebene an, bei dem jeder Knoten genau Grad 5 hat. Wieviele Punkte muss eine solche Triangulation mindestens besitzen? Wieviele Punkte muss die konvexe Hülle haben?

## Aufgabe 10.4: Eigenschaften von Voronoi Diagrammen

Zeigen Sie:

Das Voronoi-Diagramm  $VD(P)$  einer Punktmenge  $P$  hat folgende Eigenschaften:

- a) Ein Punkt  $q$  ist Knoten des Voronoi-Diagramms  $VD(P)$  genau dann, wenn der größte leere Kreis  $C_P(q)$  mit  $q$  als Mittelpunkt drei oder mehr Punkte aus  $P$  auf dem Rand enthält.
- b) Der Bisektor zwischen zwei Punkten  $p_i$  und  $p_j$  aus  $P$  trägt genau dann zu einer Kante von  $VD(P)$  bei (d.h.  $p_i p_j$  ist eine Kante in der Delaunay-Zerlegung), wenn ein Punkt  $q$  auf dem Bisektor existiert, so dass  $C_P(q)$  sowohl  $p_i$  als auch  $p_j$  auf dem Rand enthält aber keinen anderen Punkt aus  $P$  weder im Innern noch auf dem Rand liegt.