Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2016
Übungsblatt 09
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Montag 20.06.2016, bis 14:30 Uhr — Besprechung: 27.6-1.7.

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer und den oder die Namen angeben.*
- *Abgaben sind in Gruppen von bis zu 3 Personen möglich.*

Aufgabe 1: Polygon-Cutting-Theorem (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das *Polygon Cutting Theorem* bewiesen werden. Es besagt, dass in jedem einfachen Polygon mit n Kanten eine Diagonale gefunden werden kann, die das Polygon in zwei Teile zerlegt, welche beide aus höchstens $\frac{2n}{3}$ vielen Kanten bestehen. Die Diagonale wird dabei nicht als Kante der sich ergebenden Teile mitgezählt.

a) Sei T ein Baum mit n Knoten, die alle Grad ≤ 3 besitzen. Durch das Entfernen einer Kante zerfällt T in zwei Teilbäume. Zeigen Sie, dass es möglich ist, eine Kante aus T zu entfernen, so dass beide entstehenden Teilbäume höchstens $\frac{2n+1}{3}$ viele Knoten enthalten.

b) Beweisen Sie das *Polygon Cutting Theorem*. Betrachten Sie dazu eine Triangulation des zu zerlegenden Polygons, den dualen Graphen dieser Triangulation und wenden Sie Aufgabenteil **a)** an.

Aufgabe 2: Triangulation von Punktemengen (4 Punkte)

Eine Triangulierung einer Punktmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ ist eine maximale Menge von Liniensegmenten, deren Endpunkte zu S gehören, und die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden. Gegeben seien n Punkte in allgemeiner Lage (keine 3 Punkte kollinear) in der Ebene.

a) Zeigen Sie: Jede Triangulierung der n Punkte hat genau $3n-r-3$ viele Kanten, wobei r die Anzahl der Kanten der konvexen Hülle bezeichnet.

b) Wir suchen eine Triangulierung von Punkten in der Ebene, bei der jeder Knoten genau Grad 5 hat. Wieviele Punkte muss eine solche Triangulierung mindestens besitzen? Wieviele Punkte muss die konvexe Hülle haben? Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel an!

Aufgabe 3: Eindeutige Triangulierung (4 Punkte)

Zeigen Sie: Zu jeder ganzen Zahl $n \geq 3$ gibt es ein einfaches Polygon in der Ebene mit *genau* n Ecken und einer *eindeutigen* Triangulierung.

Aufgabe 4: Kantensicht (4 Punkte)

Betrachten Sie ein beliebiges einfaches Polygon P und einen Punkt p. Existiert stets eine Kante von P, die vollständig von p gesehen wird, wenn

1. der Punkt p im Inneren von P liegt?
2. der Punkt p außerhalb von P liegt?
3. der Punkt p außerhalb der konvexen Hülle von P liegt?

Beweisen oder widerlegen Sie die jeweilige Aussage.