

Zusammenfassung Konvexe Hülle und Durchschnitte

Elmar Langetepe
University of Bonn

Randomisierte Inkrementelle Konstruktion

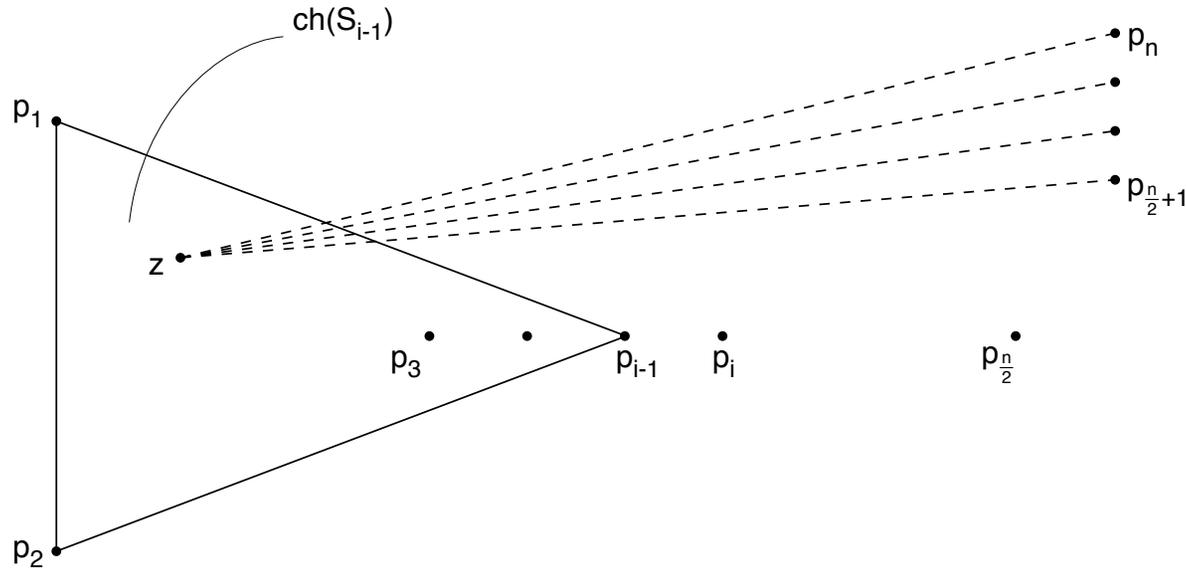
Theorem 4.6: Wird jede der $n!$ vielen Eingabereihenfolgen einer festen Punktmenge $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt, dann ergibt sich für die inkrementelle Konstruktion eine erwartete Anzahl von $O(n \log n)$ Operationen ($O(n \log n)$ Konfliktpaare).

Beispiel, Beweis!

Worst-Case Anzahl Konflikte

(p_i, p_j) in Konflikt $\iff zp_j$ schneidet eine Kante von $ch(S_{i-1})$,
die beim Einfügen von p_i entfernt wird

Schlechte Reihenfolge: $\Omega(n^2)$



Gute Eingabereihenfolge: $p_1, p_2, p_{\frac{n}{2}}, p_{\frac{n}{2}+1}, p_n: O(n)!$

Beweisskizze: Randomisierte Inkrementelle Konstruktion

- Konfliktpaare: p_i einfügen, p_j noch nicht bearbeitet:

■ (p_i, p_j) in Konflikt $\iff zp_j$ schneidet eine Kante von $ch(S_{i-1})$, die beim Einfügen von p_i entfernt wird

- 1. Fall: $p_j \in ch(S_i)$: Einmal!
- 2. Fall: zp_j schneidet Kante $e = p_i p_l$ von $ch(S_i)$
Lediglich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{i}$ war p_i der letzte ausgewählte Punkt in S_i
Mit WS $2/i$ wurde e zuletzt eingefügt!
- Insgesamt: $1 + 2 \sum_{i=1}^j \frac{1}{i} \in O(\log n)$ Konfliktpaare (festes j)

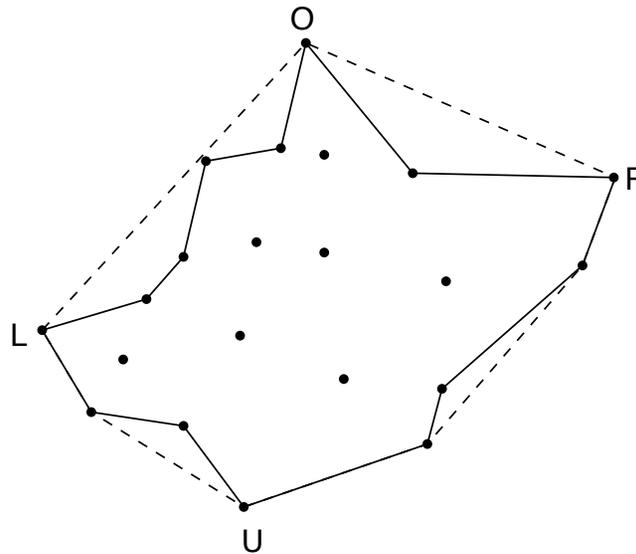
Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Beweis: 1. Konturpolygon bestimmen! 2. Geradeziehen der Ketten!

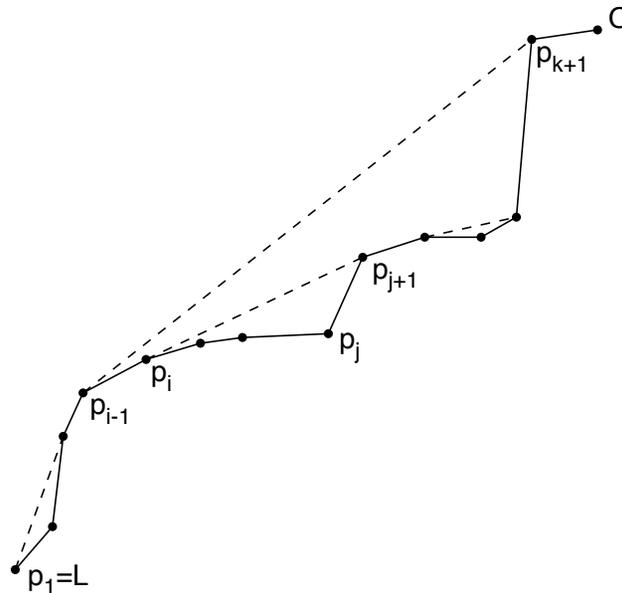
Konturpolygon bestimmen

- Sortieren nach X -(oder Y)-Koordinate, Min., Max. O, U, L, R
- Y -monotone Ketten $L - O, O - R, R - U, U - L$, Beispiel $L - O$
- Mit Sweep in $O(n)$ erstellen!



Konturketten in konvexe Ketten

- Sweep: Konvex-so-far, Backtracking, Beispiel Tafel
- Insgesamt nicht mehr als $O(n)$ (amortisiert) Orientationstests



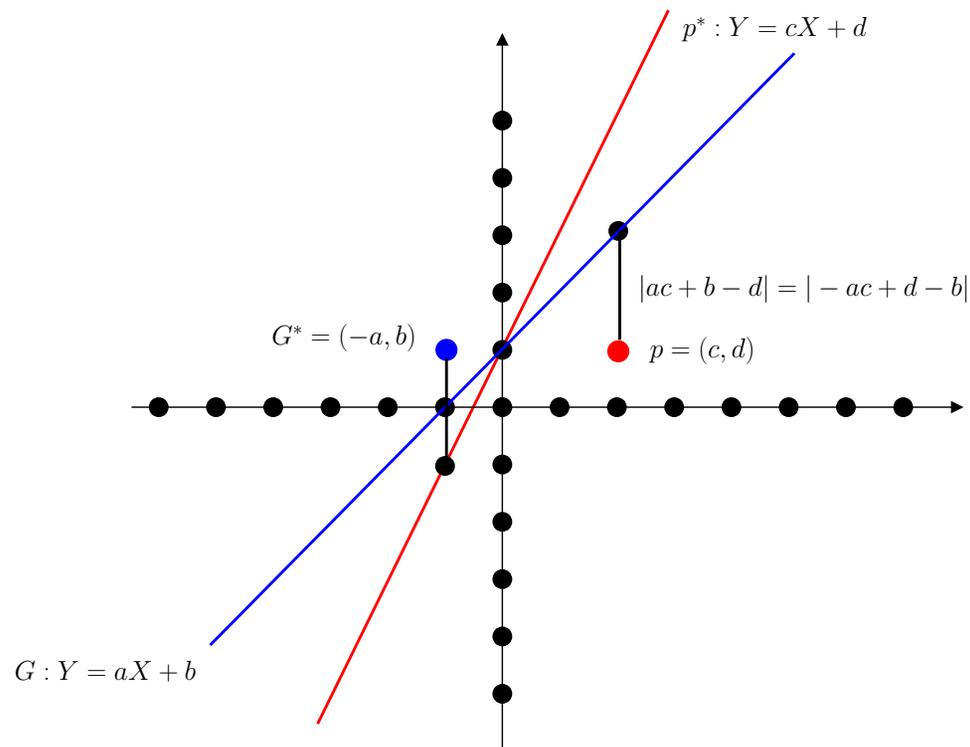
Das Dualitätsprinzip!

Konfiguration von Punkten übertragen auf Konfiguration für
Geraden

$$\begin{array}{lcl} p = (a, b) & \longrightarrow & p^* = \{Y = aX + b\} \\ G^* = (-a, b) & \longleftarrow & G = \{Y = aX + b\} \end{array}$$

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- ● Abstände bleiben gleich, gerichteter vertikaler Abstand
- $p \in G \iff G^* \in p^*$



Strukturelle Eigenschaften

Lemma 4.8 Für einen Punkt p und eine Gerade G haben wir
 $gva(p, G) = -gva(G^*, p^*)$. Insbesondere gilt:

p liegt oberhalb von $G \iff p^*$ verläuft oberhalb von G^*

Weitere Eigenschaften

Lemma 4.9 Seien $p = (a, b)$ und $q = (c, d)$ mit $a \neq c$ und $\ell(pq)$ die Gerade durch p und q .

Dann gilt:

$$p^* \cap q^* = (\ell(pq))^*.$$

Beweis: Konstruktiv die Punkte ausrechnen!

Buch Kapitel

Kapitel 4.1.2 Seite 163 oben – S. 167 oben

Kapitel 4.1.3 Seite 167 oben – S. 170 unten

Kapitel 4.1.4 Seite 170 unten – S. 172 unten