Zusammenfassung Untere Schranken

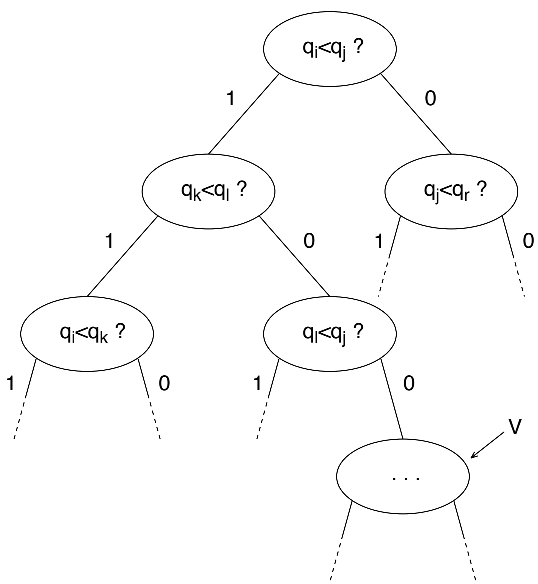
Elmar Langetepe
University of Bonn

Sortieren mit Schlüsselvergleichen

Theorem 1.4 Sortieren durch Schlüsselvergleiche hat die Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$.

Beweisidee!

- Deterministisch, binärer Entscheidungsbaum
- Für jede Permutation muss (mindestens) ein Blatt da sein
- mind. $n!$ Blätter, dann Höhe $h \in \Omega(n \log n)$



Lineares Modell, Elementtest

- Erweiterte Tests der Form: $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + d < 0$?
- Lineare Funktion h auswerten, 1 Schritt!
- Untere Schranke für Elementtest: $W \subseteq \mathbb{R}^n$
- Entscheidungsproblem: Liegt $x \in W$?
- Zusammenhangskomponenten:
  - Elemente a, b (weg-)zusammenhängend in $W \subseteq \mathbb{R}^n$, stetiger Weg in W
  - $a \in W$, Zusammenhangskomponente $Z(a) \subseteq W$, Menge aller solcher b's in W, $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$
  - Äquivalenzrelation

Allgemeinere untere Schranke

Theorem 1.5 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit m Zusammenhangskomponenten. Dann benötigt jeder Algorithmus für den Elementtest von W mindestens $\log m$ viele Schritte.

Beispiel (Binäres) Suchen in Intervallen!

$W = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$, I_j disjunkt!
Elementtest $x \in \mathbb{R}$: $x \in W$?
Tests $cx + d < 0$ (verschiedene d, c)
$\Omega(\log_2 m)$!
Alg. hat Intervalle bestenfalls sortiert: $I_1 < I_2 < \cdots < I_m$
d kann so gewählt werden, dass immer halbiert wird.
$O(\log_2 m)$ und somit $\Theta(\log_2 m)$!

Allgemeinere untere Schranke

Theorem 1.5 Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge mit m Zusammenhangskomponenten. Dann benötigt jeder Algorithmus für den Elementtest von W mindestens $\log m$ viele Schritte.

- Tests der Form $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + d < 0$ (auch $x_i < x_j$)!
- $W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m$, W_i disjunkt, wegzs.-hängend
- $A_b := \{x \in \mathbb{R}^n :$ Alg. terminiert in Blatt b bei Eingabe $x\}$
- Hyperebenentests zum Blatt b: A_b konvex, wegzs.-hängend
- $W = \mathbb{R}^n \cap W = \left(\bigcup_{b \text{ Blatt}} A_b\right) \cup W = \cup_{b \text{ Blatt}} (A_b \cap W) = \cup_{b \in B} A_b$
- B definiert durch: $(A_b \cap W) \neq \emptyset$
- $(A_b \subseteq W_j)$: $m \leq |B| \leq$ Anzahl Bätter Entscheidungsbaum
- Pfad der Länge $\log_2(m)$ muss existieren!

Buchkapitel, Seiten

Kapitel 1.2.5

Seite 35 – 40 unten