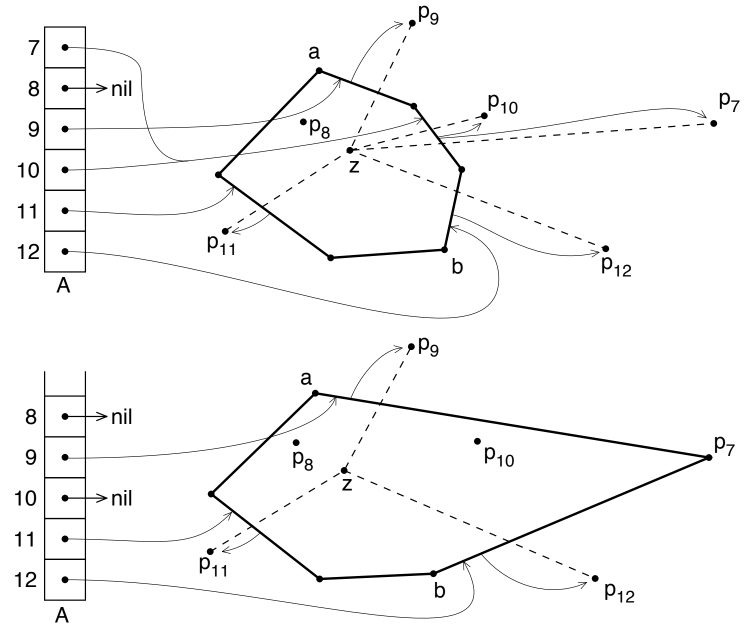
Konvexe Hülle und Durchschnitte

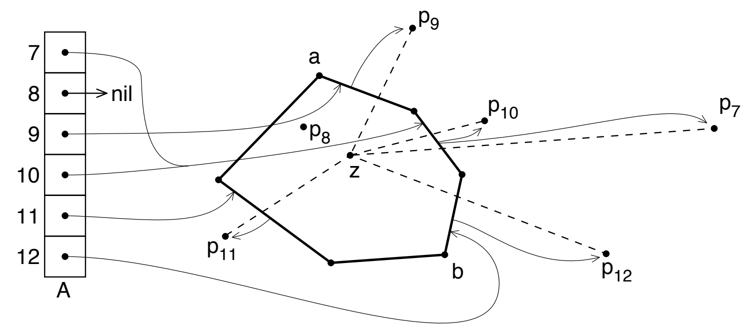
Elmar Langetepe
University of Bonn

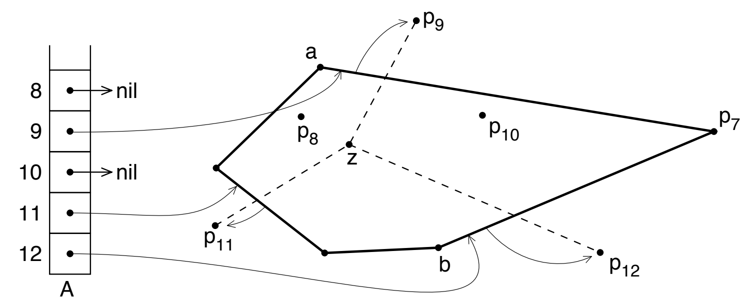
Erwartete Anzahl Konflikte: Beweis!



Erwartete Anzahl Konflikte: Beweis!

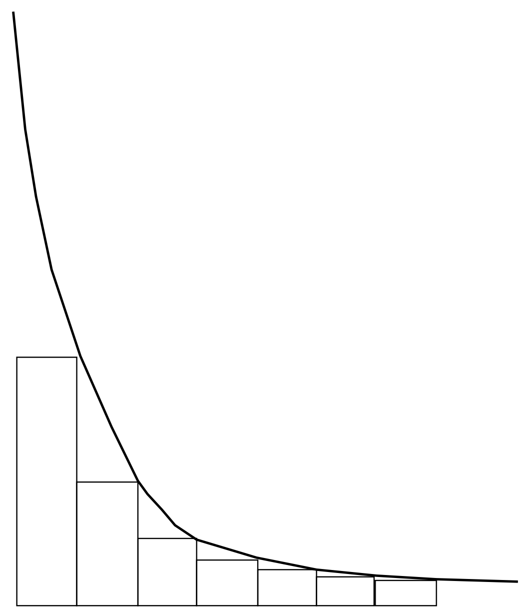
(p_i, p_j) in Konflikt $\iff$ zp_j schneidet eine Kante von *ch*(S_{i-1}),
die beim Einfügen von p_i entfernt wird





Abschätzung durch Integral!

$$\sum_{i=1}^{j} \frac{2}{j} \leq 2 \int_{i=1}^{j} \frac{1}{x} dx \in O(\log n)$$



Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

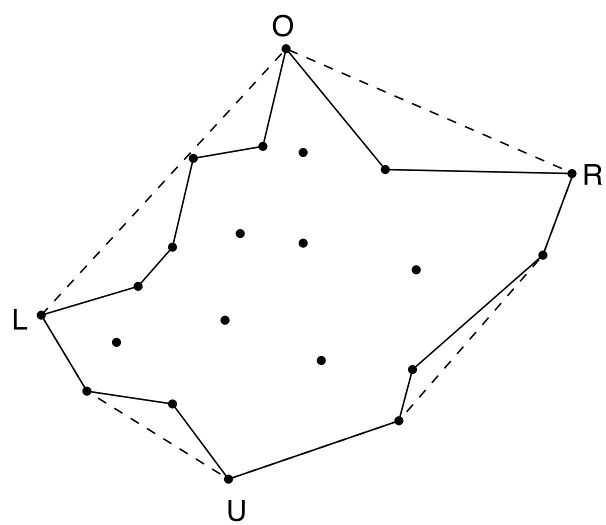
Beweis: Konturpolygon bestimmen!

Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

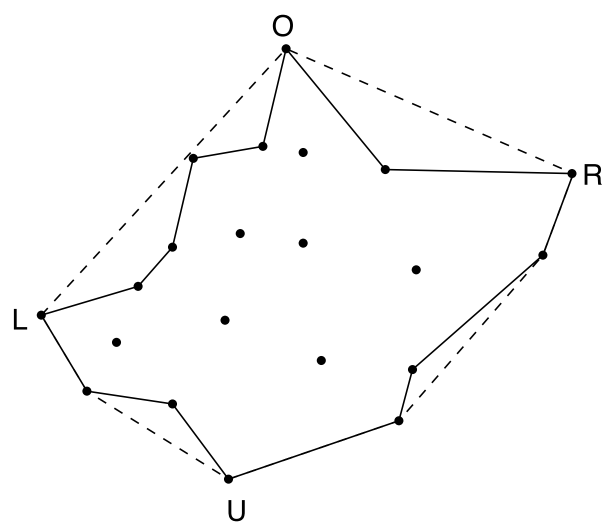
Beweis: Konturpolygon bestimmen! Geradeziehen der Ketten

Konturpolygon bestimmen



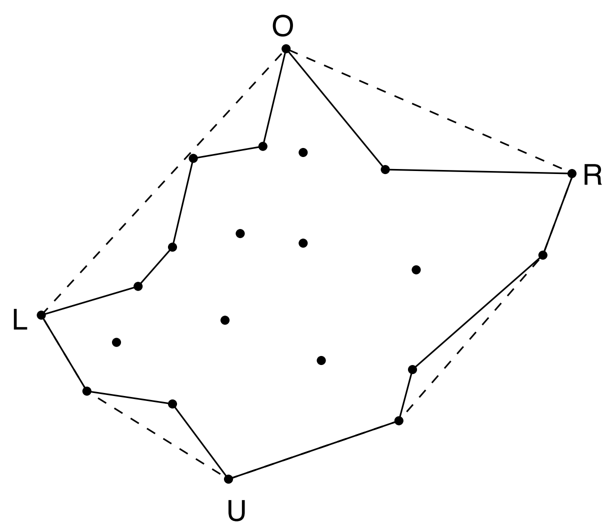
Konturpolygon bestimmen

- Sortieren nach X- und Y-Koordinate, Min., Max. O, U, L, R
- Y-monotone Ketten $L-O$, $O-R$, $R-U$, $U-L$, Beispiel $L-O$



Konturpolygon bestimmen

- Sortieren nach X- und Y-Koordinate, Min., Max. O, U, L, R
- Y-monotone Ketten $L-O$, $O-R$, $R-U$, $U-L$, Beispiel $L-O$
- Laufzeit: $O(n)$



Konturketten in konvexe Ketten

Konturketten in konvexe Ketten

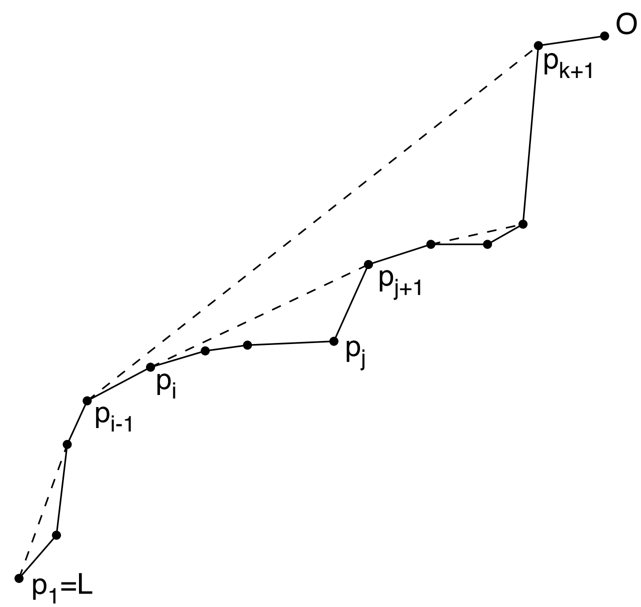
- Sweep: Konvex-so-far, Backtracking, Beispiel Tafel

Konturketten in konvexe Ketten

- Sweep: Konvex-so-far, Backtracking, Beispiel Tafel
- Insgesamt nicht mehr als $O(n)$ (amortisiert) Orientationtests

Konturketten in konvexe Ketten

- Sweep: Konvex-so-far, Backtracking, Beispiel Tafel
- Insgesamt nicht mehr als $O(n)$ (amortisiert) Orientationtests



Einfaches optimales Verfahren: Vorsortieren!

Theorem 4.7 Die konvexes Hülle von n sortierten Punkten kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Das Dualitätsprinzip!

Das Dualitätsprinzip!

Konfiguration von Punkten übertragen auf Konfiguration für Geraden

Das Dualitätsprinzip!

Konfiguration von Punkten übertragen auf Konfiguration für Geraden

$$
\begin{array}{rcl}
p = \quad (a,b) & \longrightarrow & p^* = \{Y = aX + b\} \\
G^* = (-a,b) & \longleftarrow & G = \{Y = aX + b\}
\end{array}
$$

Das Dualitätsprinzip!

Konfiguration von Punkten übertragen auf Konfiguration für Geraden

$$\begin{array}{rcccl} p = & (a,b) & \longrightarrow & p^* = \{Y = aX + b\} \\ G^* = & (-a,b) & \longleftarrow & G = \{Y = aX + b\} \end{array}$$

Beispiel!

Strukturelle Eigenschaften

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- Abstände bleiben gleich

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- Abstände bleiben gleich
- Gerichteter vertikaler Abstand gva, Vorzeichen

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- Abstände bleiben gleich
- Gerichteter vertikaler Abstand gva, Vorzeichen
- $p \in G \Longleftrightarrow G^* \in p^*$

Strukturelle Eigenschaften

- Relative Lage von Punkten und Geraden zueinander
- Abstände bleiben gleich
- Gerichteter vertikaler Abstand gva, Vorzeichen
- $p \in G \iff G^* \in p^*$

Lemma 4.8 Für einen Punkt p und eine Gerade G haben wir $\mathit{gva}(p, G) = -\mathit{gva}(G^*, p^*)$. Insbesondere gilt:

$$p \text{ liegt oberhalb von } G \iff p^* \text{ verläuft oberhalb von } G^*$$

Weitere Eigenschaften

Weitere Eigenschaften

Lemma 4.9 Seien $p = (a, b)$ und $q = (c, d)$ mit $a \neq c$ und $\ell(pq)$ die Gerade durch p und q.

Dann gilt:

$$p^* \cap q^* = (\ell(pq))^*.$$

Weitere Eigenschaften

Lemma 4.9 Seien $p = (a, b)$ und $q = (c, d)$ mit $a \neq c$ und $\ell(pq)$ die Gerade durch p und q.

Dann gilt:

$$p^* \cap q^* = (\ell(pq))^*.$$

Beweis: Konstruktiv!

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$ reelle Zahlen a_i, b_i

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$ reelle Zahlen a_i, b_i
- Durchschnitt der unteren Halbebenen $H_i = \{Y \leq a_i X + b_i\}$

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$ reelle Zahlen a_i, b_i
- Durchschnitt der unteren Halbebenen $H_i = \{Y \leq a_i X + b_i\}$

$$\bigcap_i^n H_i$$

Berandet durch untere Kontur des Arrangements der Geraden

Dualität ausnutzen

Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\Longleftrightarrow$ das Liniensegment $G_i^* G_j*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\iff$ das Liniensegment $G_i^* G_j*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Konvexe Hülle und Schnitt von Halbebenen ist identisch

Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\Longleftrightarrow$ das Liniensegment $G_i^* G_j*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Konvexe Hülle und Schnitt von Halbebenen ist identisch

Beweis!

Ergebnisse

Ergebnisse

Korollar 4.11 Die Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen hat die Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.

Ergebnisse

Korollar 4.11 Die Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen hat die Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.

Korollar 4.12 Der Schnitt von n Halbebenen, deren Geraden nach Steigung sortiert sind, kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.