

# Kompetitive Suche

Elmar Langetepe  
University of Bonn

# Definitionen!

# Definitionen!

- Online Problem, unvollständige Information

# Definitionen!

- Online Problem, unvollständige Information
- Vergleich mit Optimaler Offline-Lösung

# Definitionen!

- Online Problem, unvollständige Information
- Vergleich mit Optimaler Offline-Lösung
- Beispiele: Packen von Behältern, Suche nach Objekten

# Definitionen!

- Online Problem, unvollständige Information
- Vergleich mit Optimaler Offline-Lösung
- Beispiele: Packen von Behältern, Suche nach Objekten
- Formales Gütemaß

# Definitionen!

- Online Problem, unvollständige Information
- Vergleich mit Optimaler Offline-Lösung
- Beispiele: Packen von Behältern, Suche nach Objekten
- Formales Gütemaß

**Def. Kompetitiver Faktor:**  $\Pi$  Online-Problem und  $S$  Strategie, die jede Instanz  $P \in \Pi$  korrekt löst.  $K_S(P)$  die Kosten, die  $S$  verursacht und  $K_{\text{OPT}}(P)$  die Kosten einer optimalen Offline-Lösung von  $P$ . Dann heißt  $S$   **$C$ -kompetitiv**, falls es  $C, A > 0$  gibt, so dass für alle  $P \in \Pi$  gilt:  $K_S(P) \leq C \cdot K_{\text{OPT}}(P) + A$ .

Dabei wird  $C$  als der *kompetitive Faktor* bezeichnet.

# Beispiel: Bin Packing!



# Beispiel: Bin Packing!

- Pakete verschiedener Höhe  $Q_i \leq 1$

# Beispiel: Bin Packing!

- Pakete verschiedener Höhe  $Q_i \leq 1$
- Sukzessive in Behälter der Höhe  $H = 1$

# Beispiel: Bin Packing!

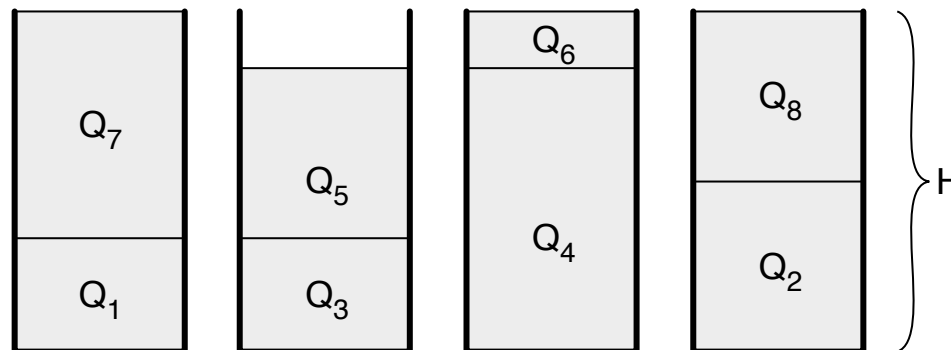
- Pakete verschiedener Höhe  $Q_i \leq 1$
- Sukzessive in Behälter der Höhe  $H = 1$
- Keine Information über das nächste Paket

# Beispiel: Bin Packing!

- Pakete verschiedener Höhe  $Q_i \leq 1$
- Sukzessive in Behälter der Höhe  $H = 1$
- Keine Information über das nächste Paket
- Minimiere die Anzahl der Behälter

# Beispiel: Bin Packing!

- Pakete verschiedener Höhe  $Q_i \leq 1$
- Sukzessive in Behälter der Höhe  $H = 1$
- Keine Information über das nächste Paket
- Minimiere die Anzahl der Behälter
- Beispiel:  $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$ , Optimal 4 Beh.



# Strategie First Fit

# Strategie First Fit

- Fülle aktuelles  $Q_i$  in den ersten möglichen Behälter

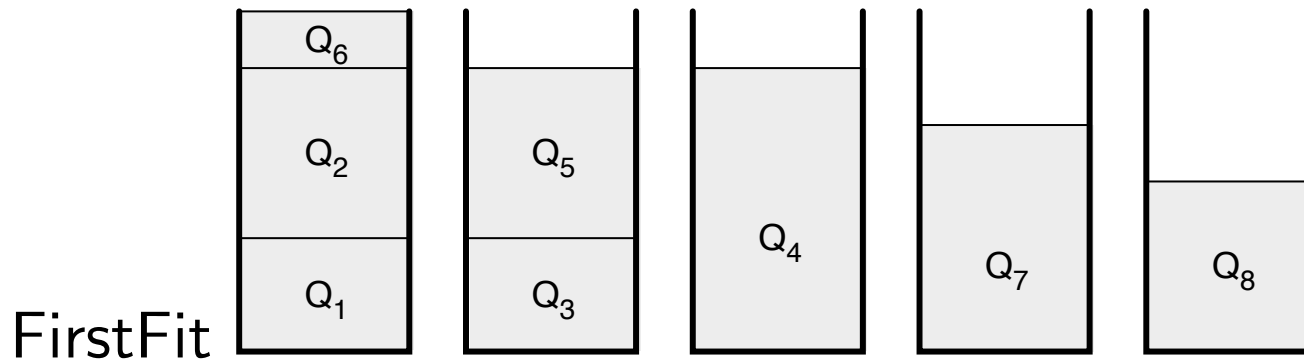
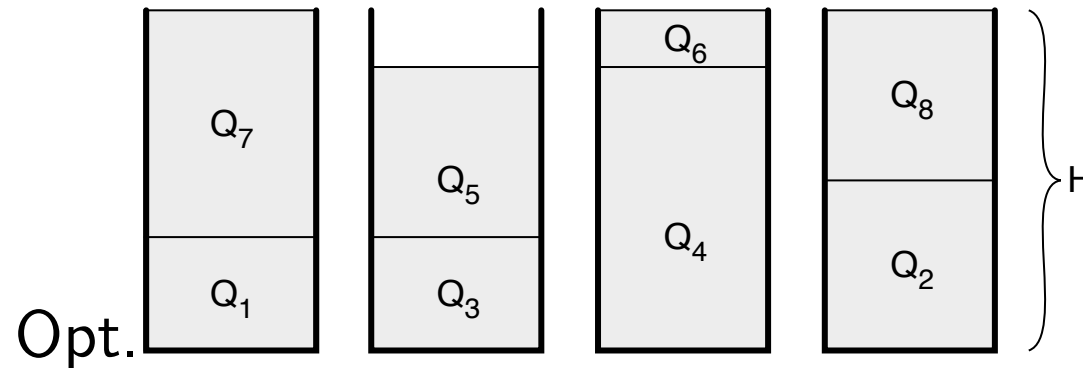
# Strategie First Fit

- Fülle aktuelles  $Q_i$  in den ersten möglichen Behälter
- Neuer Behälter, falls  $Q_i$  nicht passt!



# Strategie First Fit

- Fülle aktuelles  $Q_i$  in den ersten möglichen Behälter
- Neuer Behälter, falls  $Q_i$  nicht passt!



# Strategie First Fit

# Strategie First Fit

**Theorem 7.9:** Die Strategie FirstFit verwendet maximal doppelt so viele Behälter wie die optimale Strategie und somit einen kompetitiven Faktor von 2.

# Strategie First Fit

**Theorem 7.9:** Die Strategie FirstFit verwendet maximal doppelt so viele Behälter wie die optimale Strategie und somit einen kompetitiven Faktor von 2.

Beweis: Tafel!

# Strategie First Fit

**Theorem 7.9:** Die Strategie FirstFit verwendet maximal doppelt so viele Behälter wie die optimale Strategie und somit einen kompetitiven Faktor von 2.

Beweis: Tafel!

Untere Schranke? Beweis?

# Strategie First Fit

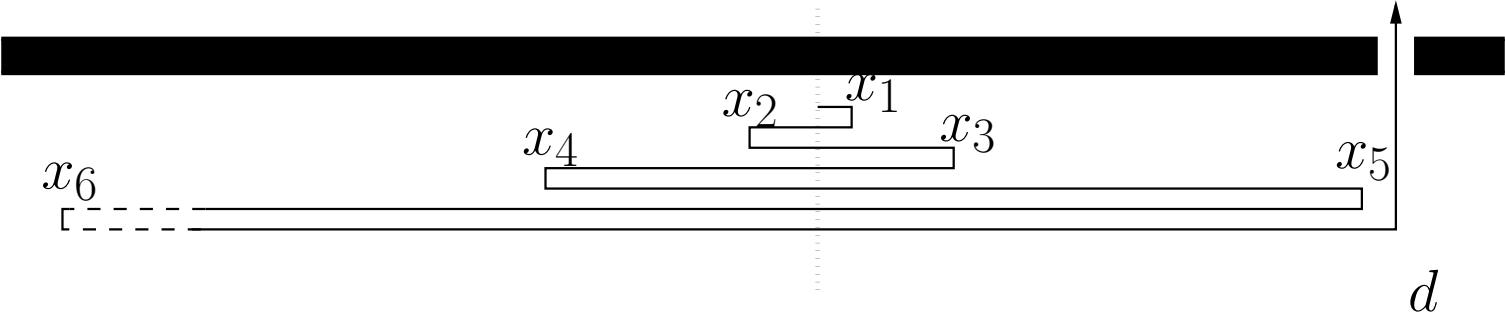
**Theorem 7.9:** Die Strategie FirstFit verwendet maximal doppelt so viele Behälter wie die optimale Strategie und somit einen kompetitiven Faktor von 2.

Beweis: Tafel!

Untere Schranke? Beweis?

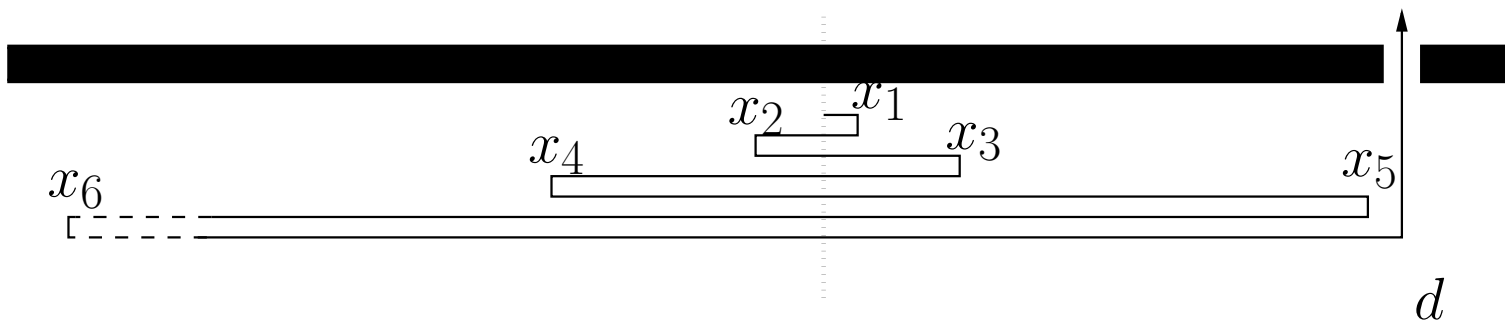
Offline Problem, Komplexität

# Korridore ohne Sicht!



# Korridore ohne Sicht!

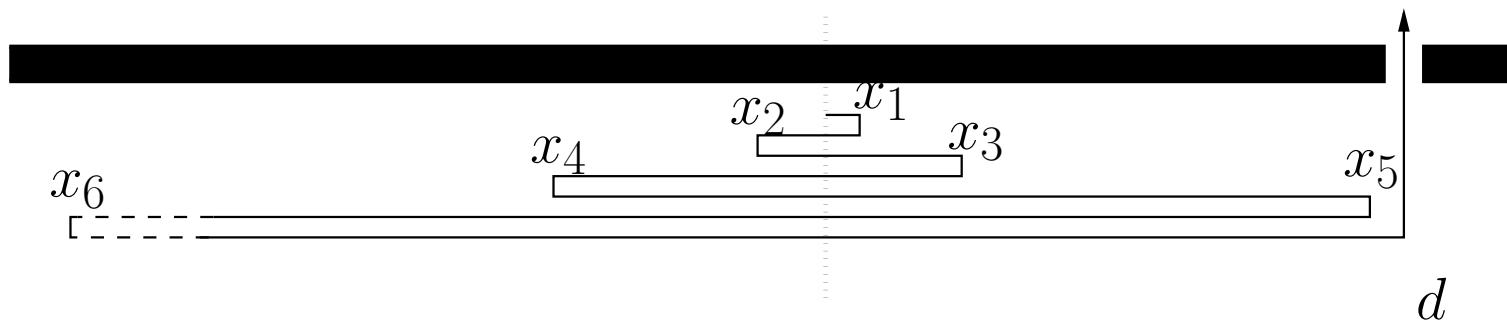
- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade





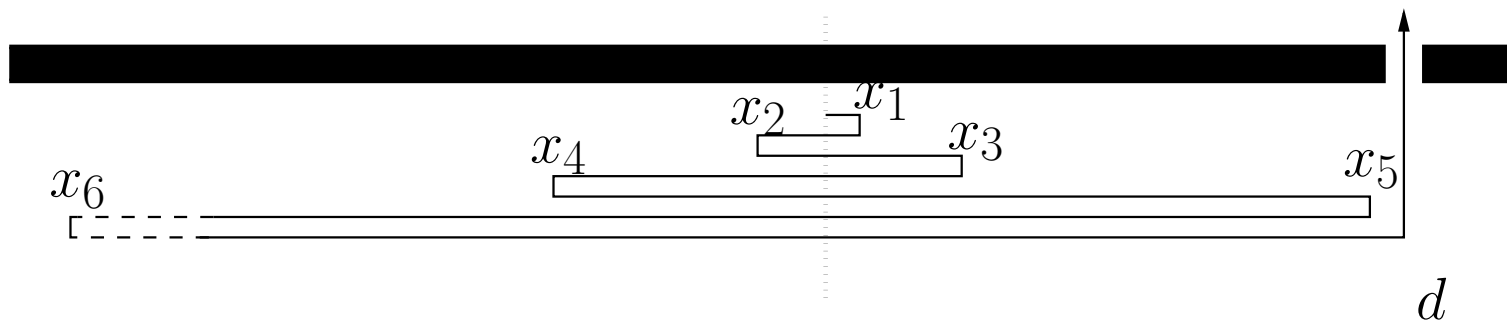
# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?



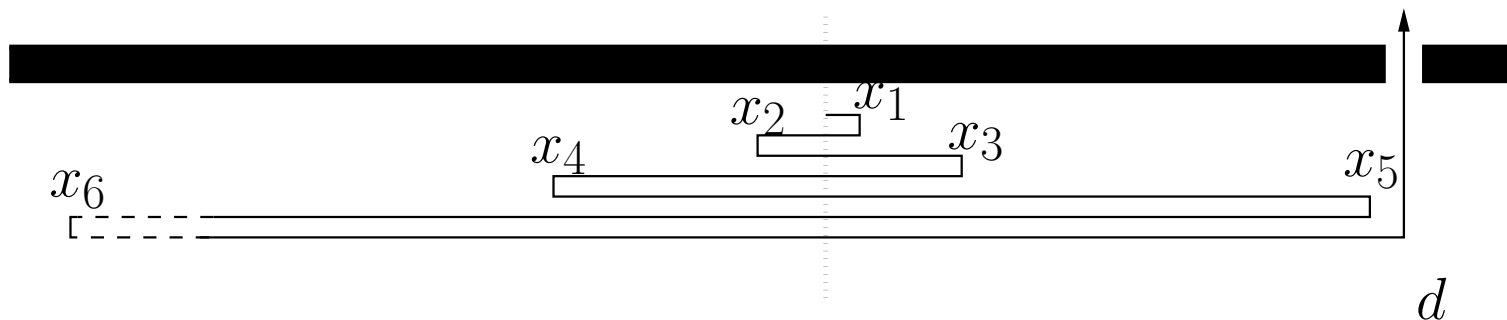
# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe  $x_1$  rechts, Tiefe  $x_2$  links uswuf.



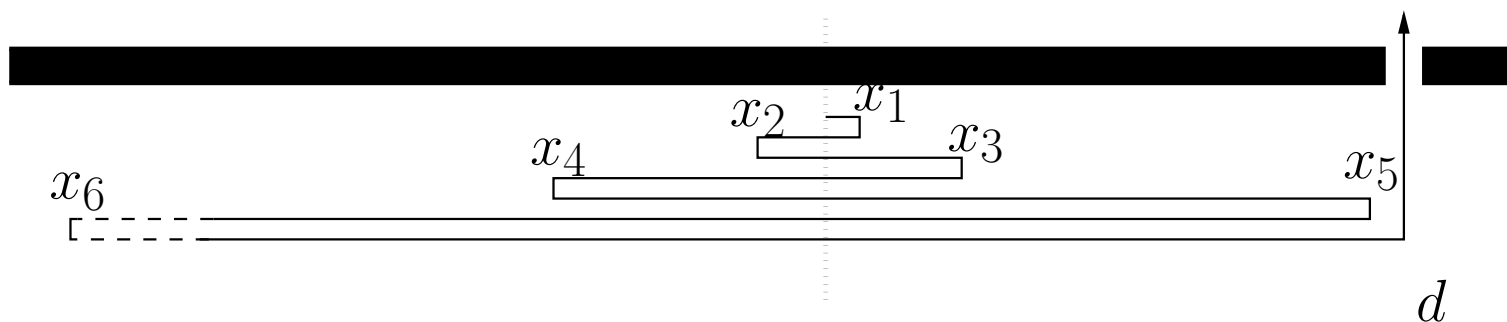
# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe  $x_1$  rechts, Tiefe  $x_2$  links uswuf.
- Startsituation:  $2x_1 \geq C\epsilon$ , für jedes  $C > 0$  ex.  $\epsilon$



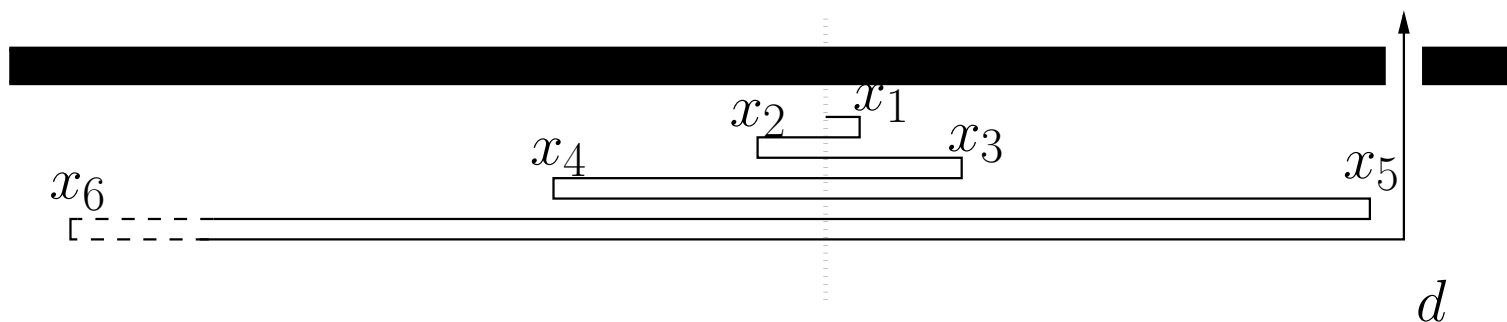
# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe  $x_1$  rechts, Tiefe  $x_2$  links uswuf.
- Startsituation:  $2x_1 \geq C\epsilon$ , für jedes  $C > 0$  ex.  $\epsilon$
- Abhilfe: Additive Konstante oder Ziel ist mind 1 entfernt!



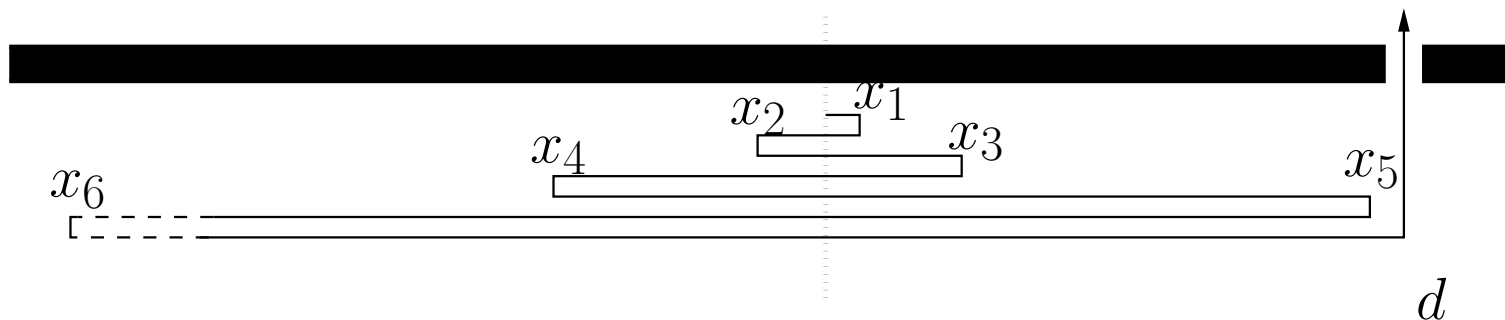
# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe  $x_1$  rechts, Tiefe  $x_2$  links uswuf.
- Startsituation:  $2x_1 \geq C\epsilon$ , für jedes  $C > 0$  ex.  $\epsilon$
- Abhilfe: Additive Konstante oder Ziel ist mind 1 entfernt!
- Worst-Case, gerade bei  $d$  verpasst, nochmal zurück!

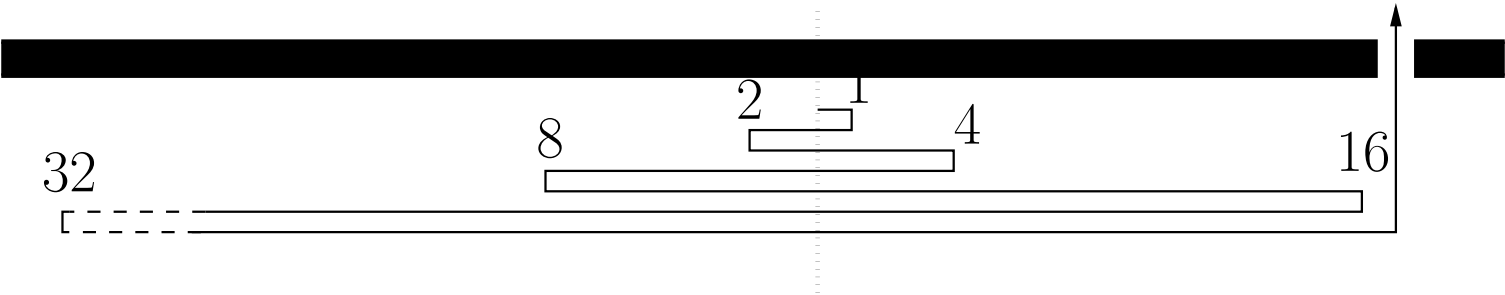


# Korridore ohne Sicht!

- 2-Wege Suche: Tür entlang Gerade
- Vergleich mit kürzestem Weg zur Tür, kompetitiv?
- Sinnvolle Strategie: Tiefe  $x_1$  rechts, Tiefe  $x_2$  links uswuf.
- Startsituation:  $2x_1 \geq C\epsilon$ , für jedes  $C > 0$  ex.  $\epsilon$
- Abhilfe: Additive Konstante oder Ziel ist mind 1 entfernt!
- Worst-Case, gerade bei  $d$  verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass:  $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq Cx_k$

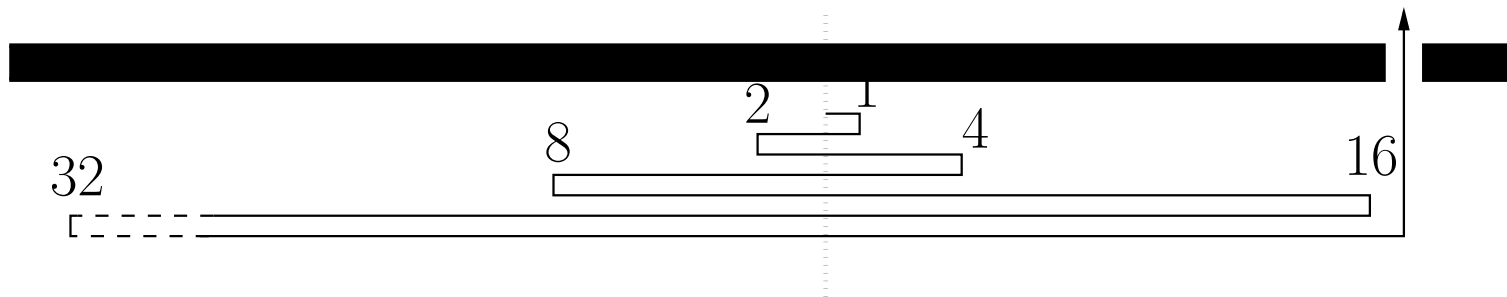


# Korridore ohne Sicht!



# Korridore ohne Sicht!

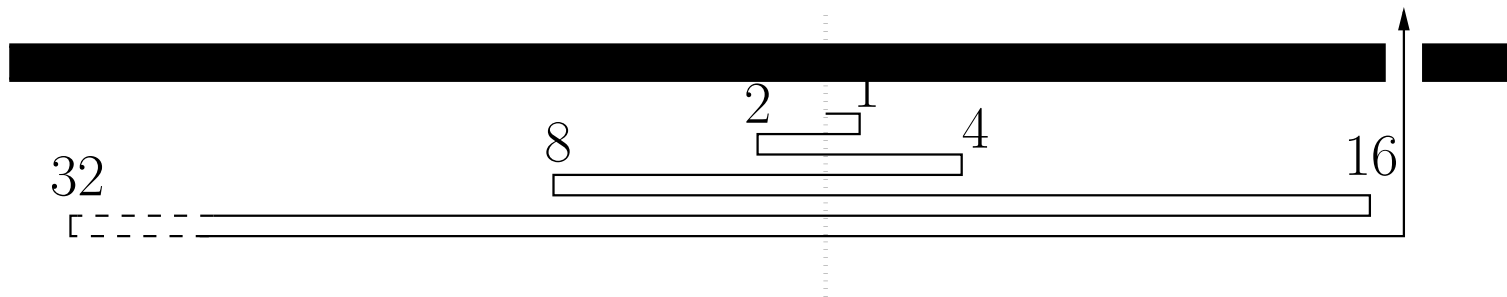
- Worst-Case, gerade bei  $d$  verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass:  $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq Cx_k$





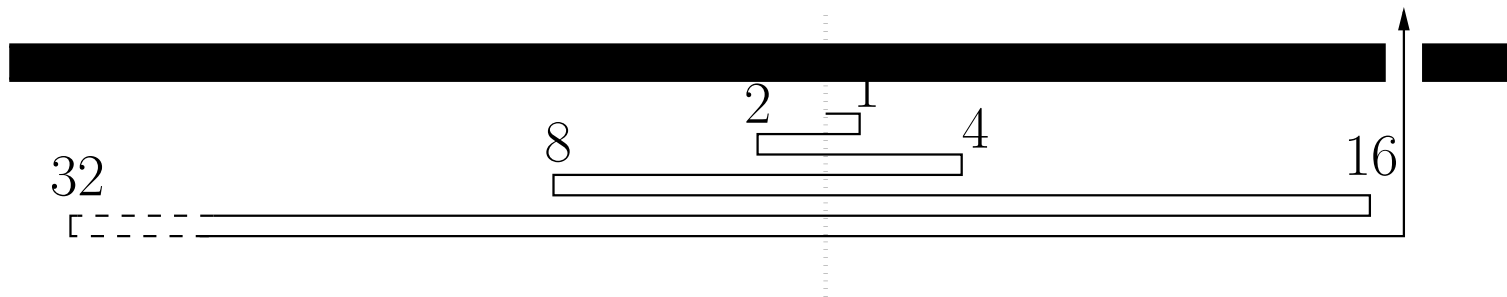
# Korridore ohne Sicht!

- Worst-Case, gerade bei  $d$  verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass:  $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq Cx_k$
- Minimiere:  $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k}{x_k} = 1 + 2\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$



# Korridore ohne Sicht!

- Worst-Case, gerade bei  $d$  verpasst, nochmal zurück!
- Finde Strategie, so dass:  $\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k \leq Cx_k$
- Minimiere:  $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} 2x_i + x_k}{x_k} = 1 + 2\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$
- $x_i = 2^{i-1}$ , offensichtlich Faktor  $C = 9$



# Korridore ohne Sicht!

# Korridore ohne Sicht!

Strategie  $x_i = 2^{i-1}$  Doublingstrategie, Paradigma!

**Theorem 7.10:** Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat einen kompetitiven Faktor von 9.

# Korridore ohne Sicht!

Strategie  $x_i = 2^{i-1}$  Doublingstrategie, Paradigma!

**Theorem 7.10:** Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat einen kompetitiven Faktor von 9.

Analysiere  $1 + 2 \frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$  oder einfach  $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{x_k}$

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$



# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$
- Genauer  $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$  und  $\sup_k F_k(X) = C$

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$
- Genauer  $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$  und  $\sup_k F_k(X) = C$
- Allgemein: Funktional  $F_k$  stetig und unimodal: Unimodal:  
 $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$
- Genauer  $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$  und  $\sup_k F_k(X) = C$
- Allgemein: Funktional  $F_k$  stetig und unimodal: Unimodal:  
 $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$
- Ein paar zusätzliche einf. Bedingungen!

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$
- Genauer  $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$  und  $\sup_k F_k(X) = C$
- Allgemein: Funktional  $F_k$  stetig und unimodal: Unimodal:  
 $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$
- Ein paar zusätzliche einf. Bedingungen!
- Z.B.:  $F_{k+1}(f_1, \dots, f_{k+1}) \geq F_k(f_2, \dots, f_{k+1})$

# Theorem Opt. der Exponentialfunktion: Gal 1980

- Strategie: Sequenz  $X = f_1, f_2, \dots$
- Minimiere Funktional  $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$
- Genauer  $\inf_Y \sup_k F_k(Y) = C$  und  $\sup_k F_k(X) = C$
- Allgemein: Funktional  $F_k$  stetig und unimodal: Unimodal:  
 $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$
- Ein paar zusätzliche einf. Bedingungen!
- Z.B.:  $F_{k+1}(f_1, \dots, f_{k+1}) \geq F_k(f_2, \dots, f_{k+1})$
- **Theorem Gal** Exponentialfunktion minimiert  $F_k$ :

$$\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$$

mit  $A_a = a^0, a^1, a^2, \dots$  und  $a > 0$ .

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?



# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- Folgt aus  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{d+b} \leq \frac{a}{b}$

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- Folgt aus  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{d+b} \leq \frac{a}{b}$
- Einfache Äquivalenzumformung!

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- Folgt aus  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{d+b} \leq \frac{a}{b}$
- Einfache Äquivalenzumformung!
- Optimiere:  $f_k(a) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} a^i}{a^k}$

# Unser Beispiel: Exponentialfunktion

- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- Unimodal  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  and  $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- $\frac{\sum_{i=1}^{k+1} A \cdot f_i}{A \cdot f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} f_i}{f_k}$
- $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ?
- Folgt aus  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{d+b} \leq \frac{a}{b}$
- Einfache Äquivalenzumformung!
- Optimiere:  $f_k(a) := \frac{\sum_{i=1}^{k+1} a^i}{a^k}$
- Minimiert durch  $a = 2$

# Theorem Gal 1980/2000

Falls  $F_k$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

- i)  $F_k$  ist stetig,
- ii)  $F_k$  ist unimodal:  $F_k(A \cdot X) = F_k(X)$  und  
 $F_k(X + Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}$ ,
- iii)  $\liminf_{a \mapsto \infty} F_k\left(\frac{1}{a^k}, \frac{1}{a^{k-1}}, \dots, \frac{1}{a}, 1\right) =$   
 $\liminf_{\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \dots, \epsilon_1 \mapsto 0} F_k(\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \dots, \epsilon_1, 1)$ ,
- iv)  $\liminf_{a \mapsto 0} F_k(1, a, a^2, \dots, a^k) =$   
 $\liminf_{\epsilon_k, \epsilon_{k-1}, \dots, \epsilon_1 \mapsto 0} F_k(1, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)$ ,
- v)  $F_{k+1}(f_1, \dots, f_{k+1}) \geq F_k(f_2, \dots, f_{k+1})$ .

Dann gilt:  $\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$  mit  $A_a = a^0, a^1, a^2, \dots$   
und  $a > 0$ .

# Korridore ohne Sicht!

# Korridore ohne Sicht!

Strategie  $x_i = 2^{i-1}$  Doublingstrategie!

**Theorem 7.11:** Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat den kleinstmöglichen kompetitiven Faktor.



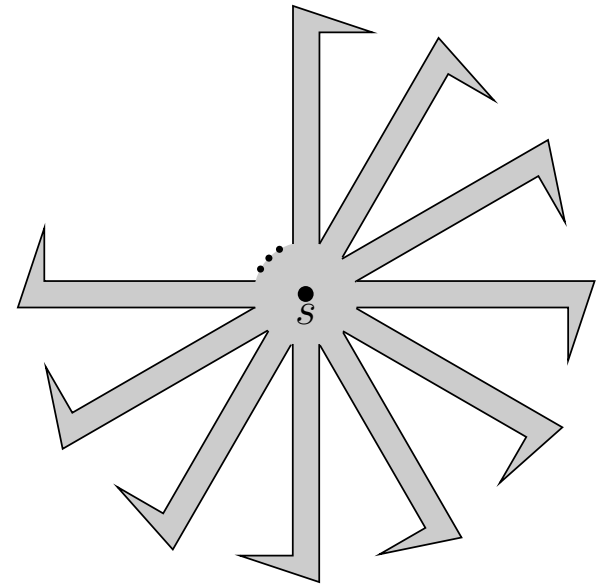
# Korridore ohne Sicht!

Strategie  $x_i = 2^{i-1}$  Doublingstrategie!

**Theorem 7.11:** Die Strategie der abwechselnden Verdopplung der Suchtiefe hat den kleinstmöglichen kompetitiven Faktor.

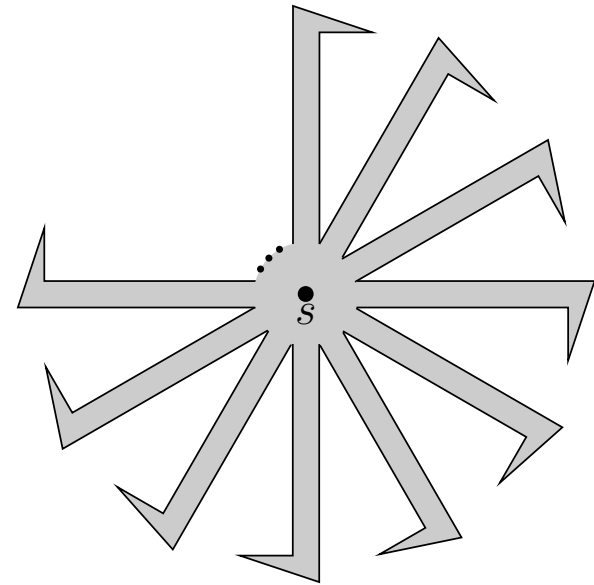
Beweis: Anwendung des Theorems von Gal!

# Anwendung m-Wege Suche



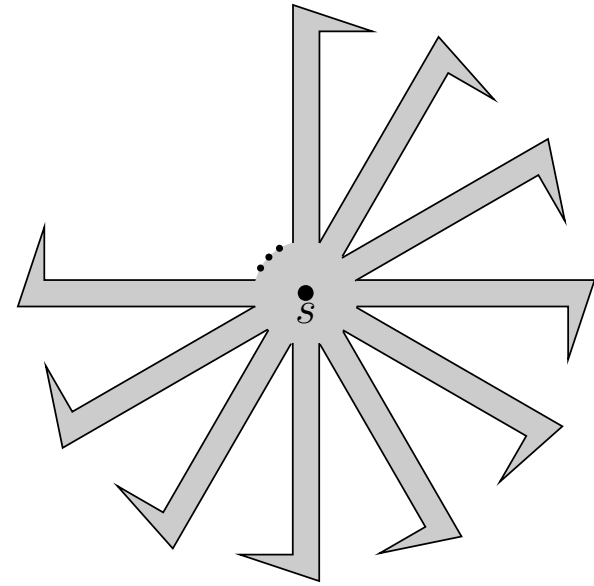
# Anwendung m-Wege Suche

- Beliebiges  $m$ , nicht kompetitiv, Abb.!



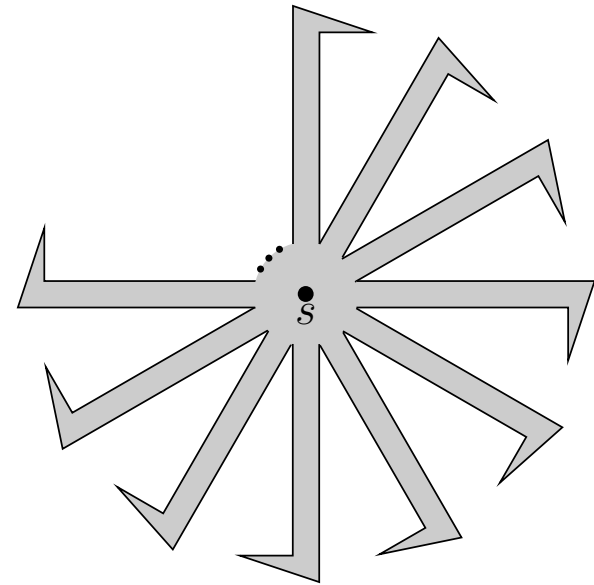
# Anwendung m-Wege Suche

- Beliebiges  $m$ , nicht kompetitiv, Abb.!
- $2m - 1$  gegenüber 1!



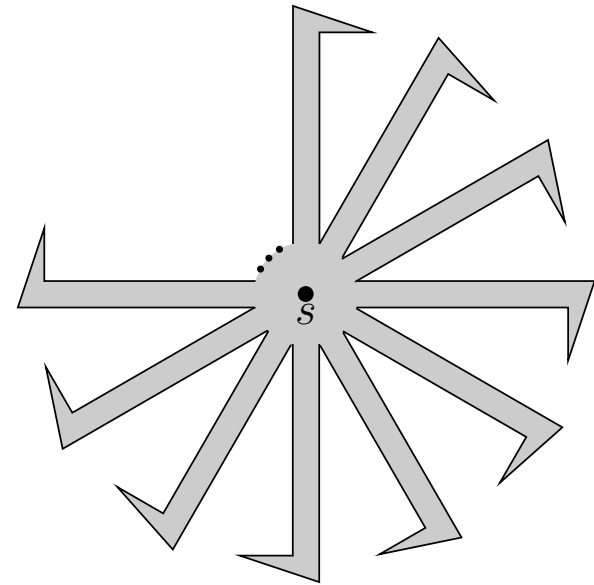
# Anwendung m-Wege Suche

- Beliebige  $m$ , nicht kompetitiv, Abb.!
- $2m - 1$  gegenüber 1!
- Festes  $m$ , unendliche Strahlen!



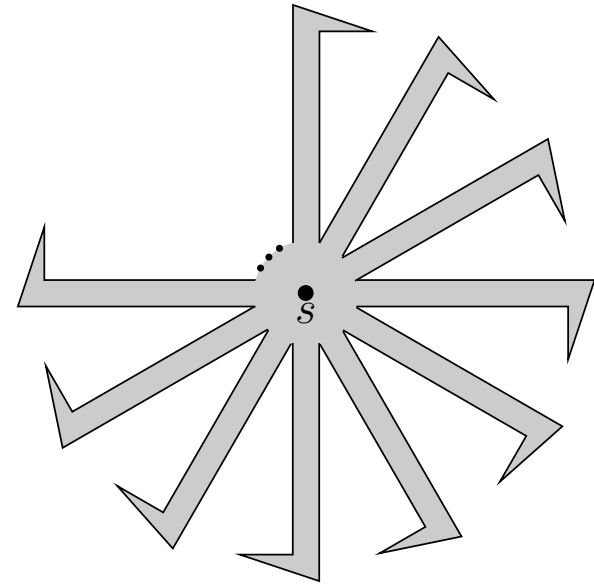
# Anwendung m-Wege Suche

- Beliebiges  $m$ , nicht kompetitiv, Abb.!
- $2m - 1$  gegenüber 1!
- Festes  $m$ , unendliche Strahlen!
- Ann.: Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe

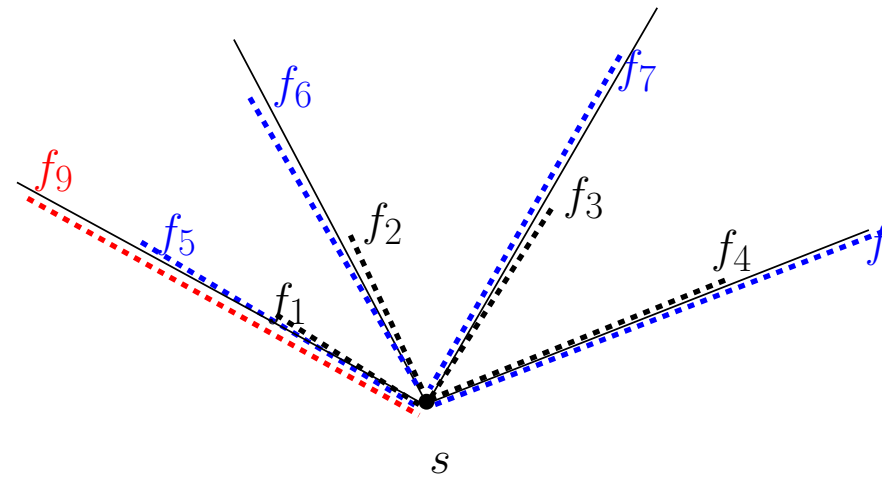


# Anwendung m-Wege Suche

- Beliebige  $m$ , nicht kompetitiv, Abb.!
- $2m - 1$  gegenüber 1!
- Festes  $m$ , unendliche Strahlen!
- Ann.: Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- Tupel  $(f_j, J_j)$ : Tiefe, nächster Besuch!



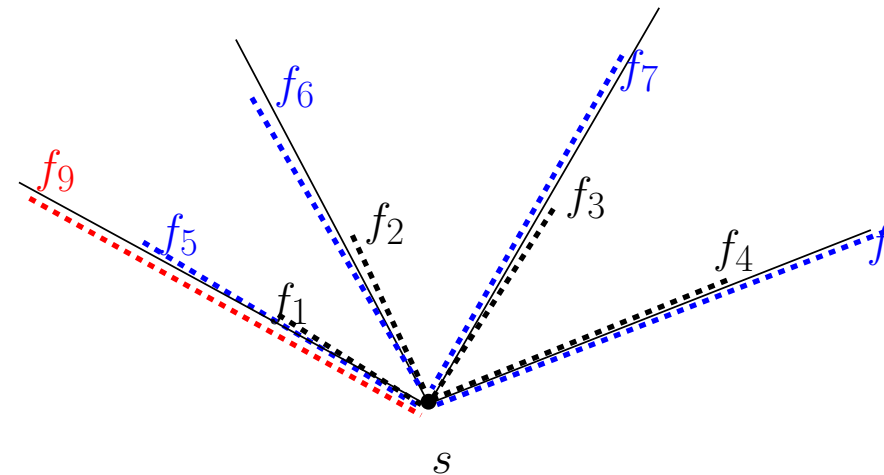
# Anwendung m-Wege Suche





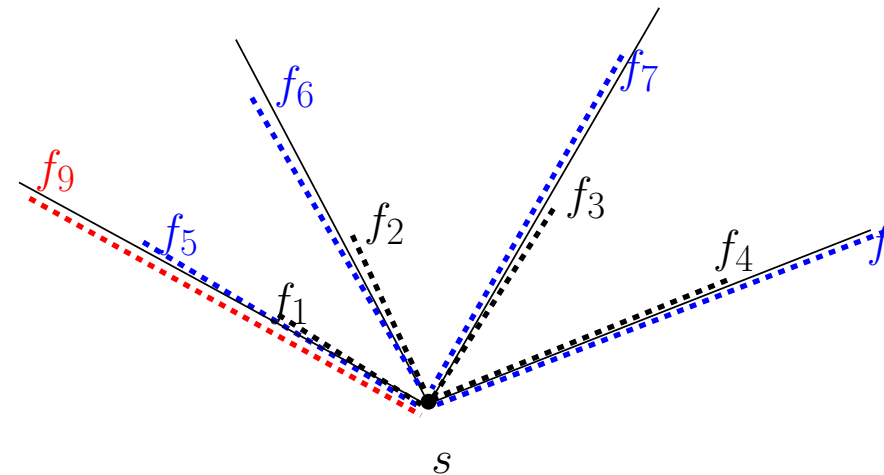
# Anwendung m-Wege Suche

- Ann.:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-1}$



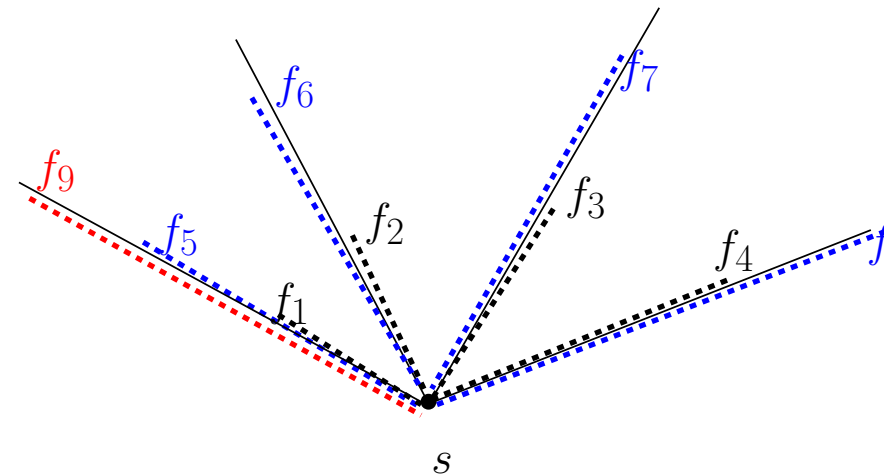
# Anwendung m-Wege Suche

- Ann.:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-1}$
- Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe



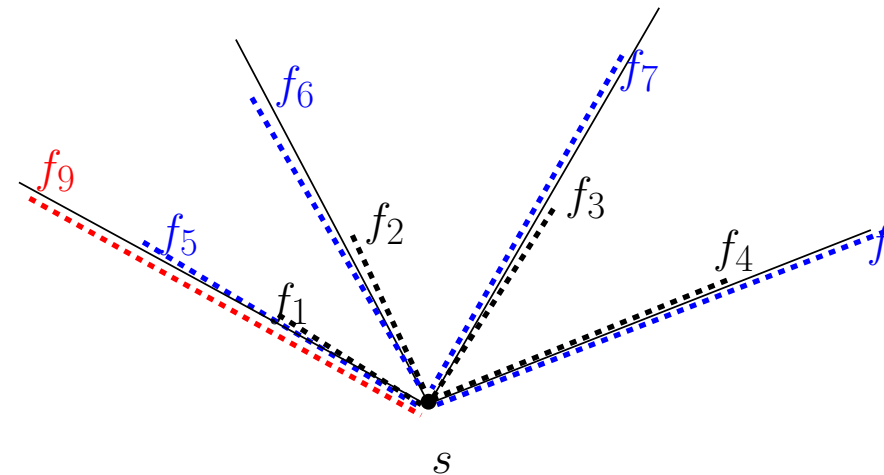
# Anwendung m-Wege Suche

- Ann.:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-1}$
- Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{f_{k+2} \sum_{i=1}^{k+m-1} f_i}{f_k}$   
für alle  $k$ .



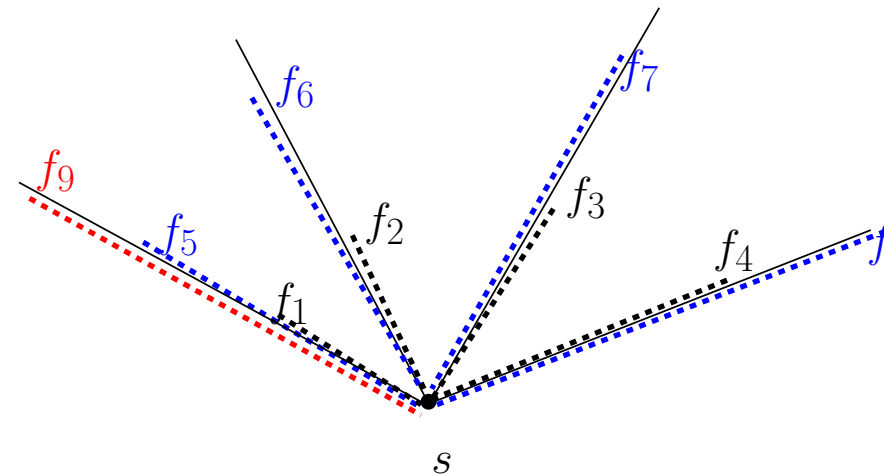
# Anwendung m-Wege Suche

- Ann.:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-1}$
- Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{f_{k+2} \sum_{i=1}^{k+m-1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- (Gal) Exp.-funktion minimiert  $F_k$ :  
 $\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$   
 mit  $A_a = a^0, a^1, a^2, \dots$  und  $a > 1$ ,  
 optimal  $a = \frac{m}{m-1}$

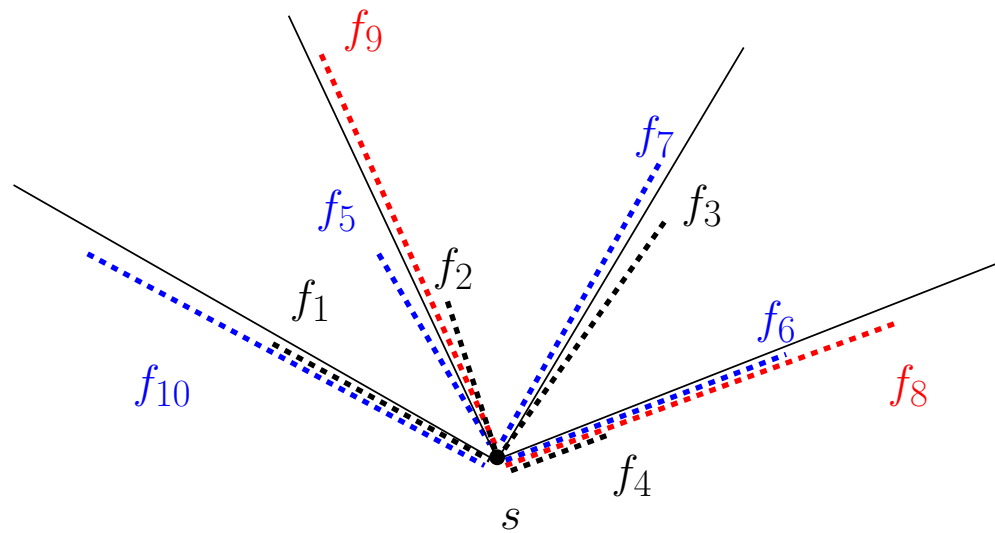


# Anwendung m-Wege Suche

- Ann.:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-1}$
- Strahlen in fester Reihenfolge, wachsende Tiefe
- $F_k(f_1, f_2, \dots) := \frac{f_{k+2} \sum_{i=1}^{k+m-1} f_i}{f_k}$  für alle  $k$ .
- (Gal) Exp.-funktion minimiert  $F_k$ :  
 $\sup_k F_k(X) \geq \inf_a \sup_k F_k(A_a)$   
 mit  $A_a = a^0, a^1, a^2, \dots$  und  $a > 1$ ,  
 optimal  $a = \frac{m}{m-1}$
- Faktor:  $C = 1 + 2m \left( \frac{m}{m-1} \right)^{m-1}$  opt.

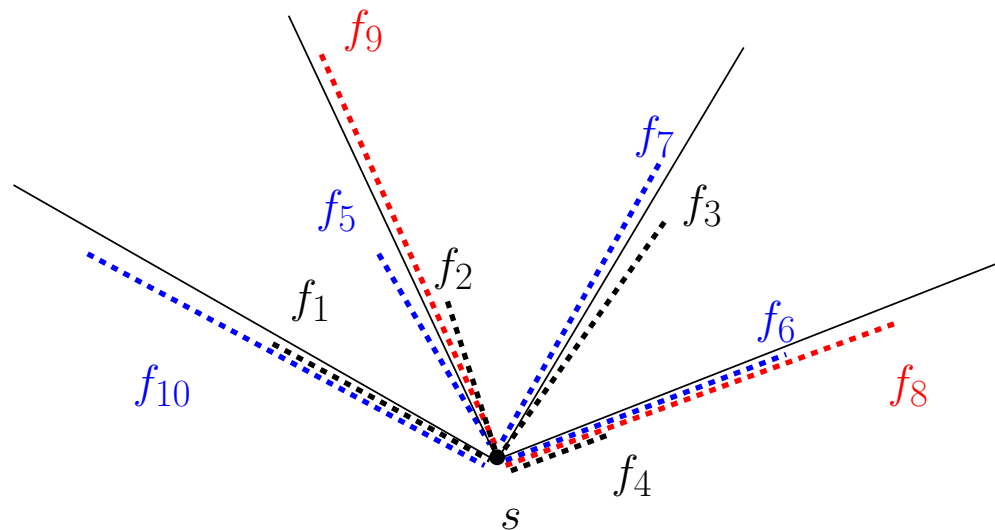


# m-Wege Suche



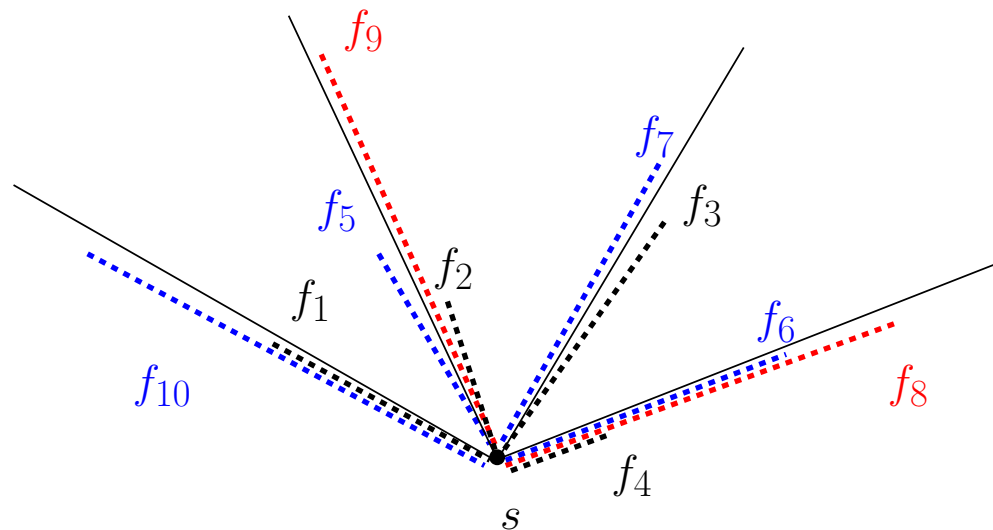
# m-Wege Suche

- **Lemma** Es gibt stets eine optimale m-Wege Strategie  $(f_1, f_2, \dots)$ , die die Strahlen in fester Reihenfolge und mit wachsender Tiefe besucht!



# m-Wege Suche

- **Lemma** Es gibt stets eine optimale m-Wege Strategie  $(f_1, f_2, \dots)$ , die die Strahlen in fester Reihenfolge und mit wachsender Tiefe besucht!
- periodisch und monoton, also:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-m}$





# m-Wege Suche

- **Lemma** Es gibt stets eine optimale m-Wege Strategie  $(f_1, f_2, \dots)$ , die die Strahlen in fester Reihenfolge und mit wachsender Tiefe besucht!
- periodisch und monoton, also:  $(f_j, J_j)$ ,  $J_j = j + m$ ,  $f_j \geq f_{j-m}$
- Beweis Tafel! Strategie ändern! Bedingungen!

