Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2014
Abgabe: 07.05.2014, 12:30 Uhr

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

2+2+2+2 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind:

(a) $A_{\text{all}} = \{\langle M \rangle : M \text{ akzeptiert alle Eingaben}\}$

(b) $A = \{\langle M \rangle w : M \text{ akzeptiert } w\}$

(c) $H_{\leq |Q|} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf jeder Eingabe nach höchstens } |Q| \text{ Schritten}\}$
Hierbei ist $|Q|$ die Anzahl an Zuständen von M.

(d) $\text{TAPE}_{\text{positive}} = \{\langle M \rangle w : M \text{ benutzt bei Eingabe } w \text{ nur Bandzellen mit Index } i \in \{1, 2, \ldots\}\}$

Aufgabe 4.2

4 Punkte

Zeigen Sie, dass das Reduktionskonzept „$\leq$“ transitiv ist, das heißt es gilt: Aus $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$ folgt $L_1 \leq L_3$.

Aufgabe 4.3

3+3 Punkte

(a) Für welche Sprachen L über dem Alphabet Σ gilt $L \leq \emptyset$ bzw. $L \leq \Sigma^*$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien $L_1, L_2 \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$ rekursive Sprachen über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass $L_1 \leq L_2$ gilt.

Präsenzaufgabe

Ein Aufzähler E für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^* = \{0, 1\}^*$ ist eine Turingmaschine, die alle Wörter aus L (aber keine Wörter, die nicht zu L gehören) durch # getrennt auf ein spezielles Ausgabeband schreibt. Im Allgemeinen terminiert ein Aufzähler nicht. Insbesondere, wenn L unendlich viele Wörter enthält, ist nur garantiert, dass für jedes Wort $w \in L$ ein Index $i_w \in \mathbb{N}$ existiert, sodass der Aufzähler das Wort w nach i_w Schritten auf das Band geschrieben hat.

Beweisen Sie, dass die Sprache L genau dann rekursiv ist, wenn ein Aufzähler E existiert, der alle Wörter von L in lexikographischer Reihenfolge ausgibt.

Hinweis: Sie können annehmen, dass L unendlich viele Wörter enthält.