Grundlagen der Algorithmischen Geometrie SS 2013
Übungsblatt 10
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Für jede Aufgabe werden bis zu vier Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Bei der Dynamisierung von Datenstrukturen wurde die Kombination von Binärstruktur und gelegentlichem Neubau betrachtet. Für das schwache Entfernen wird ein balancierter Baum T benutzt, um die richtige Teilstruktur V_i zu finden, aus der das Element schwach entfernt werden soll. Das Element wird dabei auch aus T entfernt.

Warum reicht es nicht aus, das Element nur aus T zu entfernen? Beim wiederholten Entfernen würde man doch sofort feststellen, dass das Element nicht mehr vorhanden ist.

Aufgabe 2:

In der Vorlesung haben Sie eine Dynamisierung mittels Kombination von Binärstruktur und gelegentlichem Neubau kennengelernt. Damit kann ein statischer Datentyp so dynamisiert werden, dass die Kosten von *Insert* und *Delete* gering sind, wenn man über eine Folge von Operationen mittelt. Eine strengere Mittelung als die aus der Vorlesung verlangt, dass der Mittelwert aus den Kosten einer Operation *Insert* (W_n, d) und den Kosten der vorausgegangenen m *Insert*-Operationen durch eine Funktion der aktuellen Strukturgröße n beschränkt ist, wobei $m \geq 0$ frei gewählt werden kann. Zeigen Sie, dass bei der Verwendung dieser strengen Definition die Aussage

$$Insert \in O(log\ s\ \frac{B_V(s)}{s})$$

nicht mehr gilt.
Hinweis: Man betrachte eine Folge von $2^{a+b} - 2^a$ Einfügungen in die anfangs leere Struktur, an die sich $2^{a+b} - 2^a - 2^b + 1$ Entferneoperationen und eine weitere Einfügung anschliessen.

Aufgabe 3:

Die in der Vorlesung vorgestellte generische Dynamisierung setzt voraus, dass Anfragen an die Datenstruktur *zerlegbar* sind. Das heißt, wir verlangen, dass ein binärer Operator $\otimes$ existiert, sodass für jede Binärdarstellung $V_1, ..., V_{\lfloor \log n \rfloor}$ von V gilt:

$$\mathrm{query}(V, q) = \otimes \big(\mathrm{query}(V_1, q), \ldots \otimes \big(\mathrm{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor - 1}, q), \mathrm{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor}, q)\big) \ldots\big)$$

wobei $\otimes$ in konstanter Zeit ausgewertet werden kann.

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Zerlegbarkeit der folgenden vier Anfragetypen:

Lineare Programmierung: Ist q eine zulässige Lösung? Das heißt, erfüllt $q \in \mathbb{R}^n$ die gespeicherten linearen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}q_1 & +\dots & +a_{1n}q_n & \leq b_1 \\ a_{21}q_1 & +\dots & +a_{2n}q_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}q_1 & +\dots & +a_{mn}q_n & \leq b_m \end{array}$$

Extrempunktberechnung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Welcher gespeicherte Punkt maximiert f?

Konvexe Hülle – Elementtest: Liegt q innerhalb der konvexen Hülle der gespeicherten Punkte?

Konvexe Hülle – Lokale Sicht: In welchem kleinsten Winkelfeld mit Scheitel q liegt die konvexe Hülle der gespeicherten Punkte?