Algorithmen und Berechnungskomplexität II, SS 13
Aufgabenblatt 8
Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

- *Die Lösungen können bis Mittwoch, 26.06., 12:15 Uhr in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden.*
- *Abgabe in festen Gruppen von 2-3 Personen ist erlaubt.*

Aufgabe 22: Polynomielle Reduktion (4 Punkte)

Vor kurzem haben Sie die polynomielle Reduktion kennengelernt. Zeigen Sie deren Transitivität, d.h. zeigen Sie für drei Sprachen L_1, L_2, L_3:

$$L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \leq_p L_3 \Rightarrow L_1 \leq_p L_3.$$

Aufgabe 23: Polynomialzeitverifizierer (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe eines Polynomialverifizierers für zwei der folgenden Entscheidungsprobleme, dass sie in NP sind. Beschreiben Sie dazu im Detail die Kodierung und die Länge des Zertifikats, sowie die Arbeitsweise und die Laufzeit des Verifizierers. Für eines der Probleme ist nicht bekannt ob es in *NP* ist. Für welches? Formulieren Sie für dieses Problem die Schwierigkeit beim Erstellen eines Zertifikats bzw. Verifizierers.

a) **Composite** $= \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist binäre Kodierung einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ und k ist keine Primzahl$\}$

b) **VertexCover** $= \{H\#k \mid G$ ist die Kodierung eines Graphen und G enthält ein Vertex-Cover der Größe $k\}$

c) **k-kürzester Weg** $= \{G\#s\#t\#k\#l \mid G$ ist die Kodierung eines Graphen $G = (V, E)$ sowie $s, t \in V$ und es gibt mindestens k verschiedene Wege der Länge höchstens l von s nach t in $G\}$

Bitte wenden!

Aufgabe 24: Max-3-SAT (4 Punkte)

Das Problem *Max*-3-*SAT* ist wie folgt definiert.

***Max*-3-*SAT*:** Gegeben: Ein Aussagenlogischer Ausdruck $\alpha = k_1 \wedge k_2 \wedge \cdots \wedge k_\ell$ mit Klauseln vom Grad ≤ 3 in Konjunktiver Normalform mit insgesamt m verwendeten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und eine Zahl t.
Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, so dass mindestens t Klauseln aus $k_1, k_2, \ldots, k_l$ true sind?

1. Beweisen Sie, dass Max-3-*SAT* NP-Vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine Reduktion von 3-*SAT*.

2. Geben Sie ein Konstruktionssschema an, welches eine Belegung der Variablen konstruiert, so dass mindestens $\left\lceil \frac{\ell}{2} \right\rceil$ Klauseln erfüllt werden. *Hinweis: Starten Sie mit irgendeiner Belegung der Variablen. Wieviele Klauseln werden von dieser erfüllt?*

3. Betrachten Sie den Fall, dass in jeder Klausel 3 Literale zu jeweils 3 verschiedenen Variablen enthalten sind. Für eine beliebige Belegung B der Variablen bezeichne $\phi(\alpha, B)$ die Anzahl Klauseln in α welche durch B erfüllt sind. Bestimmen Sie zunächst den Wert

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\text{Belegung } B \text{ der Variablen } x_1,\ldots x_m} \phi(\alpha, B) \ .$$

   Beweisen Sie nun, dass es eine Belegung gibt die mindestens $\Phi(\alpha)/2^m$ viele Klauseln von α erfüllt. Dies entspricht wieviel Prozent der Klauseln?