Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2017/18

Abgabe: 2.11.17 - 10:15
Besprechung: 6.11.2017 - 10.11.2017

Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungszettel 3

Aufgabe 3.1: Induktion III (4 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen.

a) Die Abbildung $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch

$$T(1) = 1 \text{ und}$$
$$T(n) = T(n-1) + n \text{ für } n \geq 2.$$

Es gilt $T(n) \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.2: Eigenschaften von Relationen (6 Punkte)

Betrachten Sie folgenden Relationen R_1, R_2 und R_3^p und zeigen Sie, welche aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften sie besitzen.

a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, |a| = |b|\}$

b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, |a-b| < 1\}$

c) $R_3^p = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\big|\, \exists z \in \mathbb{Z} : a - b = z \cdot p\}$, für ein $p \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3.3: Eigenschaften von Abbildungen (6 Punkte)

a) Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

(i) $f_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen M

(iii) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an, und beweisen sie die Bijektivität.

Aufgabe 3.4: Abbildungen aus Verknüpfungen (4 Punkte)

a) Seien $f\colon N \to P$ und $g\colon M \to N$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Verknüpfung $f \circ g\colon M \to P$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ eine Abbildung ist.

b) Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y$ für alle $y \in N$?