Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik I

Probeklausur

Bitte beachten Sie folgende Hinweise: Diese Probeklausur stellt nur eine exemplarische Sammlung von möglichen Klausuraufgaben dar. Insbesondere ist der Umfang an die Umstände angepasst, dass noch nicht alle Themen in der Vorlesung behandelt wurden. Über die Weihnachtspause haben Sie die Gelegenheit, die Aufgaben in Ruhe nachzuarbeiten. Die Besprechung der dann noch bestehenden offenen Fragen findet in den ersten Übungen nach der Weihnachtspause statt.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

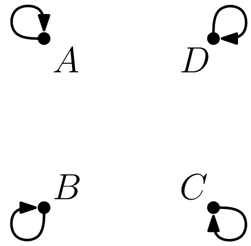
für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Seien M und N Mengen mit jeweils mindestens zwei Elementen und sei $f\colon M \to N$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass f surjektiv ist?

- (I) $\exists x \in M\, \forall y \in N\colon f(x) = y$
- (II) $\forall y \in N\, \exists x \in M\colon f(x) = y$
- (III) $\forall x \in M\, \exists y \in N\colon f(x) = y$
- (IV) $\forall y \in N\colon (\forall x \in M\colon f(x) \neq y) \Longrightarrow y \neq y$
- (V) $\neg\exists y \in N\, \forall x \in M\colon f(x) \neq y$
- (VI) $\forall y \in N \neg\forall x \in M\colon f(x) \neq y$

(c) Seien M und N nichtleere endliche Mengen und $f\colon M \to N$ eine surjektive Funktion. Zeigen Sie, dass dann $|M| \geq |N|$ gilt.

(d) Seien $M = \{A, B, C, D\}$ und $R \subseteq M \times M$ die unten schematisch dargestellte Relation auf M. Geben Sie mit Begründung an, ob R reflexiv, symmetrisch, transitiv, bzw. eine Äquivalenzrelation ist.



(e) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Wie viele symmetrische und gleichzeitig antisymmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

(a) Benennen Sie die fünf Komponenten, aus denen ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) besteht. Geben Sie bei Funktionen und Relationen stets den Definitions- und den Bildbereich an.

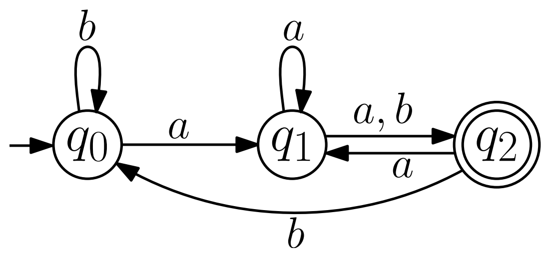
(b) Ist jede Untermenge $L' \subseteq L$ einer regulären Sprache L stets regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Geben Sie das Pumping-Lemma an.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Gibt es einen DFA, der die Sprache $L = \left\{a^i b^j : i, j \geq 1\right\}$ entscheidet und genau einen akzeptierenden Zustand besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Sei $L = \left\{w \in \Sigma^+ : \left||w|_a - |w|_b\right| \leq 1\right\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Welche Sprache entscheidet der unten abgebildete NFA? Geben Sie einen DFA an, der dieselbe Sprache entscheidet.



(g) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache

$$L = \left\{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ enthält nicht die Zeichenfolge 00 oder 11}\right\}$$

erzeugt.

(h) Bestimmen Sie für die Sprache aus der vorangehenden Aufgabe alle Äquivalenzklassen der Nerode-relation.

(i) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, die die Sprache

$$L = \left\{w \in \{0, 1\}^* : \text{Die Anzahl der Einsen in } w \text{ ist durch 3 teilbar}\right\}$$

erzeugt.

Aufgabe 3

(a) Sei M eine überabzählbare Menge und sei $N \subseteq M$ eine abzählbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass $M \setminus N$ überabzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ abzählbar ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$ der Funktionen von den natürlichen Zahlen in die Menge $\{0, 1\}$ überabzählbar ist.

(d) Zeigen Sie per vollst. Induktion, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(e) Auf wie viele verschiedene Arten können beim Skat die Buben verteilt werden. Begründen Sie Ihre Antwort. (Es gibt beim Skat 4 verschiedene Buben, alle Karten werden verteilt, 3 verschiedene Spieler erhalten jeweils 10 Karten und 2 Karten werden verdeckt in den Skat verteilt.)