4.4 Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik hatten wir Elementaraussagen nur als Boole'sche Variablen angesehen, also als Träger von Wahrheits= werten. Jetzt wollen wir etwas genauer hinschauen und zum Beispiel Aussagen folgenden Typs modellieren:

$f(x,y) \doteq z$ "Term"

$x < y$ "Prädikat" = Relation

Außerdem wollen wir Quantoren verwenden können, um z.B.

$$\forall x \, \exists y : x < y$$

$$\exists x \, \forall y : y^2 \neq x$$

hinschreiben zu können. Dazu erweitern wir zunächst unsere syntaktischen Möglichkeiten. Dabei bedienen wir uns der Begriffe "Signatur" (und später bei der Semantik: "Struktur"), die wir in 1.7, ab S. 18, eingeführt haben.

Sei $V = \{x, y, z, ..\}$ eine abzählbare Menge von Variablen, die für Objekte eines Typs s stehen.

Was s genau ist, wird später festgelegt; im Moment verlangen wir nur, daß alle Variablen vom selben Typ sind!

Sei $\sigma = \{S, F, R, K, typ\}$ eine Signatur, für die

$S = \{s\}$ und $K \subseteq V$ gilt, also erst recht

$typ(a) = s$ für alle Konstanten $a \in K$ gilt;

dann unterscheiden sich die Funktions- und Relations=

konstanten in F und R höchstens noch durch ihre Stellenzahl.

Wir betrachten gleich Ausdrücke, die Wörter über dem Alphabet

$$V \cup F \cup R \cup K \cup \{\neg, \vee, \bigvee, =, (,)\}$$

sind. Sie werden folgendermaßen induktiv definiert:

Definition (Terme)

- Jede Variable $x \in V$ ist ein Term
- Jede Konstante $a \in K$ ist ein Term
- Ist $f \in F$ eine Funktionskonstante mit $\mathrm{typ}(f) = (\underbrace{s, s, \ldots, s, s}_{n+1})$,
  und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme
  so ist auch $f t_1 t_2 \ldots t_n$ ein Term.
- Andere Terme gibt es nicht. $\boxed{\text{Definition}}$

Offenbar sind alle Terme vom Typ s.

Beispiel $V = \{x, y, z\}$, $F = \{f, g, h\}$ mit

$K = \{a, b\}$.

$\mathrm{typ}(f) = (s, s, s, s)$
$\mathrm{typ}(g) = (s, s)$
$\mathrm{typ}(h) = (s, s, s)$

Dann sind die folgenden Wörter Terme:

a, ga, hxa, $fbaz$, $gggx$, $fhaxbgy$

lies: $f(b, a, z)$ $g(g(g(x)))$ $f(h(a, x), b, g(y))$

Klammerung ergibt sich eindeutig aus Stellenzahl!

Die folgenden Wörter sind keine Terme:

$ax,\ fax,\ haxz,\ fgax,\ gv.$

<u>Definition</u> Die Menge $\Pi = \Pi(\mathcal{S}, V)$ der Primformeln ist folgendermaßen definiert:

- Für je zwei Terme t_1, t_2 gehört $t_1 \doteq t_2$ zu Π.
- Für jedes Prädikatensymbol $P \in R$ mit $typ(P) = \underbrace{(s, \ldots, s)}_{n}$ und für alle Terme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ gehört auch $Pt_1t_2\ldots t_n$ zu Π.
- Sonst gehört nichts zu Π.

Prädikate = Relationen

$\boxed{\text{Definition}}$

<u>Beispiel</u> Sei $R = \{P, Q\}$ mit $typ(P) = s$ und $typ(Q) = (s, s, s)$.
Dann sind $Pfabx$, $Qxyz$, $Qgahxzz$ Primformeln,

lies: $Q(g(a), h(x, z), z)$

aber PPx, Qab, $Qgwaa$ nicht.

Jetzt können wir prädikatenlogische Ausdrücke definieren:

<u>Definition</u> Die Menge $PL(\mathcal{S}, V)$ der prädikatenlogischen Ausdrücke ist folgendermaßen definiert:

- Jede Primformel $p \in \Pi$ gehört zu $PL(\mathcal{S}, V)$
- Mit α, β gehören auch $\neg\alpha$ und $(\alpha \vee \beta)$ zu $PL(\mathcal{S}, V)$
- Mit α und $x \in V$ gehört auch $\bigvee_x \alpha$ zu $PL(\mathcal{S}, V)$
- Sonst gehört nichts dazu.

$\boxed{\text{Definition}}$

lies: "Es gibt ein x mit α"

eigentlich müßte man "$\bigvee x\alpha$" schreiben

Was hat sich also gegenüber der Definition der aussagenlogischen Ausdrücke in AL(Π) auf S. 131 im Hinblick auf die Syntax geändert?

- Wir können in PL Quantoren verwenden, z.B. $\bigvee_x mxx \doteq c$
- Die Boole'schen Variablen sind durch Primformeln ersetzt worden, z.B. $mxx \doteq c$

Der Wahrheitswert einer Primformel läßt sich aber jetzt nicht mehr beliebig vorschreiben.
Er hängt vielmehr davon ab, wie (und wo) man die Primformel interpretiert!

<u>Beispiel</u>: Angenommen, wir interpretieren die 2-stellige Funktion m als Multiplikation und die Konstante c als 1.
Dann wird $mxx \doteq c$ interpretiert als $x \cdot x = 1$.
Das "stimmt" in jedem Körper (jeder Gruppe, jedem Ring), wenn man $x := 1$ setzt.
Ist aber c die Konstante -1, so kann man zwar in $\mathbb{C}$ ein x mit $x \cdot x = -1$ finden, nämlich $x = i$, aber in $\mathbb{R}$ existiert solch ein x nicht!

Demnach müßte der Ausdruck

$$\bigvee_x mxx \doteq c$$

über $\mathbb{R}$ den Wert "Falsch"
über $\mathbb{C}$ den Wert "Wahr" bekommen, wenn man m als Multiplikation und c als -1 interpretiert!

Um prädikatenlogische Ausdrücke interpretieren zu können, müssen wir den Variablen in V und den Funktions-, Prädikaten- und Konstantensymbolen konkrete Werte zuweisen.

Dazu sei

$$\mathcal{A} = \left(A_s, (f^{\mathcal{A}})_{f\in F}, (r^{\mathcal{A}})_{r\in R}, (k^{\mathcal{A}})_{k\in K}\right)$$

eine $\mathcal{S}$-Struktur (vgl. S. 21).
(D.h.: Es gibt eine Trägermenge $A = A_s$, in der alle Konstanten $k^{\mathcal{A}}$ liegen und auf der alle Funktionen $f^{\mathcal{A}}$ und Prädikate $r^{\mathcal{A}}$ definiert sind)

Die Verbindung zwischen $PL(\mathcal{S}, V)$ und $\mathcal{A}$ wird nun durch eine spezielle Abbildung hergestellt:

Wir starten mit einer Abbildung

$$\mathcal{I}: V \longmapsto A_s,$$

von der wir verlangen, daß für jede Konstante $k \in K$

$$\mathcal{I}(k) = k^{\mathcal{A}}$$

gilt.
Diese Abbildung wird zunächst induktiv auf alle

Terme fortgesetzt (vgl. S. 159):

Für $x \in V$ und $k \in K$ sind $f(x)$ und $f(k)$ schon definiert.

Sei nun $ft_1 \ldots t_n$ ein Term für $f \in F$ mit $\mathrm{typ}(f) = (\underbrace{s, s, \ldots, s, s}_{n+1})$ und Terme $t_1, \ldots, t_n$.

Dann setzen wir

$$\mathfrak{I}(ft_1 \ldots t_n) := f^{\mathcal{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \mathfrak{I}(t_2), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)).$$

Im nächsten Schritt wird die Abbildung $\mathfrak{I}$ so erweitert, daß sie Primformeln und allgemeinen Ausdrücken Wahrheitswerte zuweist:

Für eine Primformel (S. 160) $t_1 \doteq t_2$ setzen wir

$$\mathfrak{I}(t_1 \doteq t_2) := \begin{cases} W, & \text{falls } \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $Pt_1 \ldots t_n$, wobei $P \in R$ mit $\mathrm{typ}(P) = (\underbrace{s, s, \ldots, s}_{n})$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind,

$$\mathfrak{I}(Pt_1 \ldots t_n) := \begin{cases} W, & \text{falls } (\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \in P^{\mathcal{A}} \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierfür schreibt man auch: $P^{\mathcal{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$, d.h., $P^{\mathcal{A}}$ trifft auf $(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n))$ zu

Für allgemeine Ausdrücke in $PL(\mathcal{S}, V)$ wird $\mathfrak{I}$ nun so definiert:

$$\mathfrak{I}(\neg\alpha) := \begin{cases} W, & \text{falls } \mathfrak{I}(\alpha) = F \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekap: PL

Syntax	Semantik
$\mathcal{V}$: Menge von Variablen, typ s	Menge A_s von Objekten (Zahlen, ...)
$K \subset \mathcal{V}$: Konstanten	Konstanten $k^{\mathfrak{A}} \in A_s$
Funktionssymbole f, Prädikatensymbole P	Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$, Prädikate $P^{\mathfrak{A}}$
Signatur σ	Struktur $\mathfrak{A}_\sigma$

Interpretation $\mathfrak{I}$

Terme $fxyz$, $fxfabcy$ $\longrightarrow A_s$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Primformeln } \; t_1 \doteq t_2,\ Pt_1 \ldots t_m \\ \text{Prädikatenlogische Ausdrücke} \\ \quad - \text{Primformeln} \\ \quad - \text{mit } \alpha, \beta \text{ auch } \neg\alpha,\ (\alpha \vee \beta) \\ \quad - \text{mit } x, \alpha \text{ auch } \bigvee_x \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow \{W, F\}$$

$$\mathfrak{I} : \mathcal{V} \longrightarrow A_s \quad \text{mit} \quad \forall k \in K: \quad \mathfrak{I}(k) = k^{\mathfrak{A}}$$

$$\mathfrak{I}(ft_1 \ldots t_m) = f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_m))$$

$$\mathfrak{I}(t_1 \doteq t_2) = W \iff \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$$

$$\mathfrak{I}(Pt_1 \ldots t_m) = W \iff P^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_m))$$

$$\text{(d.h. } (\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_m)) \in P^{\mathfrak{A}})$$

$$\mathfrak{I}(\bigvee_x \alpha) = W \iff \text{es gibt } \varphi \in A_s : \quad \mathfrak{I}_x^{\varphi}(\alpha) = W$$

dabei:

$$\mathfrak{I}_x^{\varphi} : \mathcal{V} \longrightarrow A_s$$

$$y \longmapsto \begin{cases} \varphi, & \text{falls } y = x \\ \mathfrak{I}(y), & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\alpha \vee \beta) := \begin{cases} W, & \text{falls } \mathcal{I}(\alpha) = W \text{ oder } \mathcal{I}(\beta) = W \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\bigvee_x \alpha) := \begin{cases} W, & \text{falls gilt: } \exists \varphi \in A_s : \mathcal{I}_x^{\varphi}(\alpha) = W \\ F, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei

- bedeutet $\mathcal{I}_x^{\varphi}$ dieselbe Abbildung wie $\mathcal{I}$, nur, daß beim Argument $x \in V$ der Wert $\varphi \in A$ vorgeschrieben ist
- darf man das Zeichen $\mathcal{I}$ für die Abbildung nicht mit dem Existenzquantor $\exists$ der Metasprache verwechseln.

<u>Definition</u> Die wie oben definierte Abbildung $\mathcal{I}$ heißt eine <u>Interpretation</u> von $PL(\mathcal{B}, V)$ in $\mathcal{A}$.

<u>Eigentlich:</u> $\mathcal{I}: \quad V \cup PL(\mathcal{B}, V) \longrightarrow A_s \cup \{W, F\}$

<u>Abkürzungen:</u>

$$\left.\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) &:\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ (\alpha \rightarrow \beta) &:\equiv \neg\alpha \vee \beta \\ (\alpha \leftrightarrow \beta) &:\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \leftarrow \alpha) \end{aligned}\right\} \text{ wie in AL}$$

$$\bigwedge_x \alpha :\equiv \wedge x \alpha :\equiv \neg \bigvee_x \neg \alpha$$

<u>lies:</u> „für alle x gilt α"

<u>Klammersparnisregel:</u> Quantoren $\bigvee, \bigwedge$ binden so stark wie $\neg$

$$t_1 \dot{\neq} t_2 :\equiv \neg t_1 \dot{=} t_2$$

Offenbar gilt:

$$\mathcal{I}\big(\bigwedge_x \alpha\big) = W \underset{\text{Def.}}{\iff} \mathcal{I}\big(\neg \bigvee_x \neg\alpha\big) = W \iff \mathcal{I}\big(\bigvee_x \neg\alpha\big) = F$$

$\iff$ nicht (es gibt $\varphi \in A_s$: $\mathcal{I}_x^{\varphi}(\neg\alpha) = W$)

$\iff$ nicht (es gibt $\varphi \in A_s$: $\mathcal{I}_x^{\varphi}(\alpha) = F$)

$\iff$ für alle $\varphi \in A_s$: $\mathcal{I}_x^{\varphi}(\alpha) = W$

So sollte es auch sein!

Beispiele $\sigma = ((s), (m), (P), (e), typ)$ mit
$typ(e) = s$, $typ(m) = (s,s,s)$, $typ(P) = (s,s)$.

$V = \{x, y\}$

Dann sind folgende Ausdrücke in $PL(\sigma, V)$:

$$\alpha :\equiv \bigvee_y myy = x, \qquad \beta :\equiv \bigwedge_x \bigvee_y myy = x$$

$$\gamma :\equiv \bigwedge_x \bigvee_y (y \neq e \wedge y \neq x \wedge Pyx)$$

Wir betrachten jetzt verschiedene σ-Strukturen und Interpretationen:

Teilbarkeit

1) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, \cdot, |, 1)$, $\mathfrak{I}_1 : \{x, y\} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$x \longmapsto 16$
$y \longmapsto 256$

~~offenba~~

Offenbar ist $\mathfrak{I}_1(\alpha) = W$, denn
es gibt in $\mathbb{Z}$ ein Element y mit $y \cdot y = 16$,
z.B. $y = 4$ $\boxed{\text{Abänderung vormachen}}$

Aber $\mathfrak{I}_1(\beta) = F$, denn nicht für jedes $\varphi \in \mathbb{Z}$
gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \cdot y = \varphi$
z.B. für $\varphi = 7$ nicht

Ferner: $\mathfrak{I}_1(\gamma) = F$, denn nicht jedes $\varphi \in \mathbb{Z}$ hat
einen von 1 und φ verschiedenen Teiler y

Daß $\mathfrak{I}_1(y) = 256$ ist, spielt bis jetzt keine Rolle,
denn die Variable y kommt weder in α noch in β
oder γ "frei", das heißt ohne Quantor, vor.

dazu gleich noch eine Definition

Das ist anders bei dem Ausdruck

$$\delta :\equiv m \times x = y \, ; \qquad (\delta = m \times x \doteq y)$$

wegen $\mathcal{I}_1(x) = 16$ und $\mathcal{I}_1(y) = 256$ gilt tatsächlich

$$\mathcal{I}_1(m \times x) = \mathcal{I}_1(x) \cdot \mathcal{I}_1(x) = 16 \cdot 16 = 256 = \mathcal{I}_1(y),$$

und deshalb ist $\mathcal{I}_1(\delta) = W$.

2) Sei $\mathcal{A}$ wie oben,

$$\mathcal{I}_2 : \{x, y\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto 17$$
$$y \longmapsto 225$$

Jetzt ist

$\mathcal{I}_2(\alpha) = F$, denn 15 ist in $\mathbb{Z}$ kein Quadrat

$\mathcal{I}_2(\beta) = F$, (erst recht!)

$\mathcal{I}_2(\gamma) = F$, (immer noch)

$\mathcal{I}_2(\delta) = F$. denn $17 \cdot 17 \neq 225$.

3) Ist dagegen $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{C}, \cdot, \rho, 1)$ mit $\rho := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

und

$$\mathcal{I} : \{x, y\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}(x) = \sqrt{2}, \ \mathcal{I}(y) = 2,$$

so ist

$\mathcal{I}(\alpha) = W$, denn $\sqrt{2}$ ist in $\mathbb{C}$ ein Quadrat

$\mathcal{I}(\beta) = W$, denn – allgemeiner – jede Zahl in $\mathbb{C}$ ist ein Quadrat

$\mathcal{I}(\gamma) = W$, weil ρ auf alle Paare zutrifft

$\mathcal{I}(\delta) = W$, weil $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist.

<u>Wir sehen:</u> Der Wahrheitswert eines Ausdrucks $\alpha \in TL(\sigma, V)$ hängt davon ab,

- in welcher Struktur α interpretiert wird
- und – im Fall freier Variablen – wie die Interpretation $\mathcal{J}$ diese in die Trägermenge A_s abbilden.

Zur exakten Behandlung freier Variablen dient folgende

Definition

(i) $\vartheta(t) :=$ Menge der Variablen eines Terms (induktiv)

$\vartheta(k) := \emptyset$ für Konstante $k \in K$

$\vartheta(x) := \{x\}$ für Variable $x \in V$

$\vartheta(ft_1 \ldots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} \vartheta(t_i)$ für $f \in F$

(ii) $\vartheta(\alpha) :=$ Menge der Variablen eines Ausdrucks (induktiv)

$\vartheta(t_1 = t_2) := \vartheta(t_1) \cup \vartheta(t_2)$

$\vartheta(Pt_1 \ldots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} \vartheta(t_i)$ für $P \in R$

$\vartheta(\neg\alpha) := \vartheta(\alpha)$

$\vartheta((\alpha \vee \beta)) := \vartheta(\alpha) \cup \vartheta(\beta)$

$\vartheta(\bigvee_x \alpha) := \{x\} \cup \vartheta(\alpha)$

(iii) $f(\alpha) :=$ Menge der freien Variablen eines Ausdrucks (induktiv)

$f(t_1 = t_2) := \vartheta(t_1 = t_2)$

$f(Pt_1 \ldots t_n) := \vartheta(Pt_1 \ldots t_n)$

$f(\neg\alpha) := f(\alpha)$

$f((\alpha \vee \beta)) := f(\alpha) \cup f(\beta)$

$f(\bigvee_x \alpha) := f(\alpha) \setminus \{x\}$ (x wird von $\bigvee_x$ gebunden)

Beispiele

$\alpha \equiv \bigvee_y myy = x$: $v(\alpha) = \{x, y\}$

$$f(\alpha) = f(myy = x) \setminus \{y\} = \{x, y\} \setminus \{y\} = \{x\}$$

$\beta \equiv \bigvee_y myy = x \vee y = x$: $v(\beta) = \{x, y\}$

$$f(\beta) = f(\bigvee_y myy = x) \cup f(y = x) = \{x\} \cup \{x, y\} = \{x, y\}$$

in β kommt y gebunden und frei vor

→ 168-1 bis 3.

Wir wollen jetzt definieren, wie man Terme in Variablen einsetzt.

Dazu wird ein Prädikat Subst eingeführt.

Auch für Programmieren wichtig

$$\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta) \text{ bedeutet:}$$

Der Ausdruck β entsteht durch zulässige Ersetzung der Variablen x im Ausdruck α durch den Term β.

Beispiel: $\mathrm{Subst}(fxy = z,\ x,\ mvw,\ fmvwy = z)$

Wenn zwei Interpretationen auf den freien Variablen eines Ausdrucks übereinstimmen, so weisen sie ihm denselben Wahrheitswert zu:

<u>Lemma 28</u> Sei $\alpha \in PL(\mathcal{S}, V)$, und seien $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ zwei Interpretationen von $PL(\mathcal{S}, V)$ in einer $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{A}$.
Dann gilt:

$$\left(\forall x \in f(\alpha) : \mathfrak{I}_1(x) = \mathfrak{I}_2(x)\right) \Rightarrow \mathfrak{I}_1(\alpha) = \mathfrak{I}_2(\alpha)$$

<u>Beweis</u> Wir zeigen zunächst eine ähnliche Tatsache für Terme:

<u>Beh.</u> Sei t ein Term zu $\mathcal{S}$ und V, $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ wie oben.
Dann gilt

$$\left(\forall x \in v(t) : \mathfrak{I}_1(x) = \mathfrak{I}_2(x)\right) \Rightarrow \mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$$

<u>Bew.</u> Induktion über den Aufbau von t ($\rightarrow$ S. 159)

$t \equiv x \in V$: $\mathfrak{I}_1(x) = \mathfrak{I}_2(x)$ nach Voraussetzung.

$t \equiv k \in K$: $\mathfrak{I}_1(k) = k^{\mathcal{A}} = \mathfrak{I}_2(k)$ nach Definition einer Interpretation ($\rightarrow$ S. 162 unten)

$t \equiv f t_1 \ldots t_n$: für jedes i, $1 \leq i \leq n$, gilt:
$v(t_i) \subseteq v(t)$
also: $\forall x \in v(t_i)$: $\mathfrak{I}_1(x) = \mathfrak{I}_2(x)$
nach Induktionsvoraussetzung folgt also
$$\mathfrak{I}_1(t_i) = \mathfrak{I}_2(t_i)$$

insgesamt gilt also

$$\mathfrak{I}_1(t) = f^{\mathcal{A}}(\mathfrak{I}_1(t_1), \mathfrak{I}_1(t_2), \ldots, \mathfrak{I}_1(t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\mathfrak{I}_2(t_1), \mathfrak{I}_2(t_2), \ldots, \mathfrak{I}_2(t_n))$$
$$= \mathfrak{I}_2(t) \qquad \boxed{\text{Beh}}$$

Wir zeigen jetzt die Behauptung von Lemma 28 durch Induktion über α:

Sei $\alpha \equiv t_1 = t_2$

$$\underset{\text{Def. S. 167}}{\Longrightarrow} f(\alpha) = v(\alpha) = v(t_1) \cup v(t_2)$$

nach Voraussetzung des Lemmas gilt also

$$\forall x \in v(t_i): \mathcal{J}_1(x) = \mathcal{J}_2(x) \quad \text{für } i = 1,2$$

$$\underset{\text{Beh.}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{J}_1(t_i) = \mathcal{J}_2(t_i) \quad \text{für } i = 1,2$$

$$\underset{\text{Def } \mathcal{J}\ \text{S. 163}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{J}_1(t_1 = t_2) = \mathcal{J}_2(t_1 = t_2)$$

Sei $\alpha \equiv Pt_1 \ldots t_n$

Wie im vorangehenden Fall gilt $\mathcal{J}_1(t_i) = \mathcal{J}_2(t_i)$ für $1 \le i \le n$, also folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1(Pt_1 \ldots t_n) = W \quad &\underset{\text{Def } \mathcal{J}}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{J}_1(t_1), \mathcal{J}_1(t_2), \ldots, \mathcal{J}_1(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\
&\Longleftrightarrow \quad (\mathcal{J}_2(t_1), \mathcal{J}_2(t_2), \ldots, \mathcal{J}_2(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\
&\underset{\text{Def. } \mathcal{J}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathcal{J}_2(Pt_1 \ldots t_n) = W.
\end{aligned}$$

sei $\alpha \equiv \neg\alpha$ oder $\alpha \equiv (\beta \vee \gamma)$: trivial

Sei $\alpha \equiv \bigvee_x \beta$

$$\underset{\text{Def. S. 167}}{\Longrightarrow} \quad f(\alpha) = f(\beta) \setminus \{x\}.$$

nach Voraussetzung des Lemmas gilt also:

$$\forall y \in f(\beta) \setminus \{x\}: \quad \mathcal{J}_1(y) = \mathcal{J}_2(y). \qquad (*)$$

Sei nun $\mathcal{I}_1(\bigvee_x \beta) = w$

$\Longrightarrow$ es gibt $\varphi \in A_s$: $(\mathcal{I}_1)_x^\varphi(\beta) = w$

Def $\mathcal{I}$, S. 164

Offenbar folgt aus (*) : $(\mathcal{I}_1)_x^\varphi(y) = (\mathcal{I}_2)_x^\varphi(y) \quad \forall y \in f(\beta)$,

(denn für die $y \neq x$ folgt das aus (*), für x aus der Definition von $\mathcal{I}_x^\varphi$)

$\Longrightarrow$ $(\mathcal{I}_2)_x^\varphi(\beta) = w$

Induktions-voraussetzung

$\Longrightarrow$ $\exists \varphi \in A_s : (\mathcal{I}_2)_x^\varphi(\beta) = w$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{I}_2(\bigvee_x \beta) = w$. Die andere Richtung ist symmetrisch.

$\boxed{\text{Lemma 28}}$

Aus Lemma 28 folgt insbesondere:
Wenn ein Ausdruck keine freien Variablen besitzt, erhält er bei allen Interpretationen in $\mathcal{A}$ denselben Wahrheitswert.

Das ist keine Überraschung!

Beispiel

$$\bigvee_x \bigwedge_y (mxy = y \wedge myx = y)$$

Jetzt: Subst(α, x, t, β) Bsp: Subst$(fxy = c, x$, [illegible]$)$

<u>Definition</u> $t\,{}^{x}/_{t'}$ (= Term t, darin x ersetzt durch t') (induktiv)

$k\,{}^{x}/_{t} :\equiv k$ für alle Konstanten $k \in K$

$$y\,{}^{x}/_{t} :\equiv \begin{cases} t, & \text{falls } y \equiv x \\ y, & \text{falls } y \not\equiv x \end{cases}$$

$f t_1 \dots t_n\,{}^{x}/_{t} :\equiv f\, t_1{}^{x}/_{t}\, t_2{}^{x}/_{t} \dots t_n{}^{x}/_{t}$ für $f \in F$

$\boxed{\text{Definition}}$

Jetzt für Ausdrücke:

<u>Definition</u> Subst(α, x, t, β) (induktiv) $\boxed{\text{Prädikat}}$

klar:

Subst$(t_1 = t_2, x, t, \beta) :\Longleftrightarrow \beta \equiv t_1{}^{x}/_{t} = t_2{}^{x}/_{t}$

lies: wenn $\alpha \equiv t_1 = t_2$, so kann das Ergebnis der Ersetzung von x durch t nur $t_1{}^{x}/_{t} = t_2{}^{x}/_{t}$ sein

Subst$(P t_1 \dots t_n, x, t, \beta) :\Longleftrightarrow \beta \equiv P\, t_1{}^{x}/_{t}\, t_2{}^{x}/_{t} \dots t_n{}^{x}/_{t}$

trivial:

Subst$(\neg\alpha', x, t, \beta) :\Longleftrightarrow \exists \beta'$: Subst$(\alpha', x, t, \beta')$ und $\beta \equiv \neg\beta'$

Subst$(\alpha' \vee \alpha'', x, t, \beta) :\Longleftrightarrow \exists \beta', \beta''$: Subst$(\alpha', x, t, \beta')$ und Subst$(\alpha'', x, t, \beta'')$ und $\beta \equiv \beta' \vee \beta''$

(!) Subst$(\bigvee_y \alpha', x, t, \beta) :\Longleftrightarrow (x \notin f(\bigvee_y \alpha')$ und $\beta \equiv \bigvee_y \alpha')$

oder

$(x \in f(\bigvee_y \alpha')$ und $y \notin v(t)$ und $\exists \beta'$ mit Subst(α', x, t, β') und $\beta \equiv \bigvee_y \beta')$

Die letzte Bedingung besagt im Klartext:

Ersetzen von x durch t in $\bigvee_y \alpha'$ ist erlaubt, falls

- x gar nicht frei vorkommt — dann bleibt der Ausdruck unverändert
- x frei vorkommt und die Variable y (unter dem Quantor) nicht in t vorkommt — dann wird in α' Variable x durch Term t ersetzt.

Beispiele

$\mathrm{Subst}(\bigvee_y myy = x,\ y, z,\ \bigvee_y myy = x) = W$ y kommt nicht frei vor

$\mathrm{Subst}(\bigvee_y myy = x,\ x, z,\ \bigvee_y myy = z) = W$

$\mathrm{Subst}(\bigvee_y myy = x,\ x, \underbrace{y}_{t},\ \beta\ ) = F$ für alle β, denn $y \in V(t)$

$\mathrm{Subst}(\bigvee_y myy = x \vee y = w,\ y, z,\ \bigvee_y myy = x \vee z = w\ ) = W$

y kommt hier frei vor. Beachte Definition von Subst für $\vee$

Obwohl Subst als Prädikat definiert ist, verhält es sich beinahe wie eine Funktion:
Wenn $\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta)$ wahr ist, so ist β eindeutig bestimmt:

<u>Lemma 29</u> $\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta_i)$, $i = 1,2 \implies \beta_1 \equiv \beta_2$.

<u>Beweis</u> Übungsaufgabe.

Bevor wir nun den Aussagenkalkül zum Prädikatenkalkül erweitern, brauchen wir noch ein technisches Hilfsmittel:

<u>Lemma 30</u> ("Überführungstheorem")

$$\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta) \implies \left(\forall \mathfrak{I} : \ \mathfrak{I}(\beta) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(\alpha) \right)$$

(<u>in Worten</u>: wenn β aus α durch Ersetzung von x durch t entsteht, dann wird β so interpretiert, als ob beim Interpretieren von α die Variable x auf die Interpretation von t abgebildet würde.)

<u>Beweis</u> Wir zeigen zunächst wieder eine Behauptung für Terme.

<u>Beh</u>: $\forall \mathfrak{I} \quad \forall x, t, t' : \quad \mathfrak{I}(t\, {}^{x}\!/_{t'}) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(t)$

<u>Bew</u>: Induktion über den Aufbau von t:

$t \equiv y$: falls $y \not\equiv x$: $y\, {}^{x}\!/_{t'} \equiv y$ und $\mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(y) = \mathfrak{I}(y)$,

also $\mathfrak{I}(y\, {}^{x}\!/_{t'}) = \mathfrak{I}(y) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(y)$

falls $y \equiv x$: $\mathfrak{I}(x\, {}^{x}\!/_{t'}) = \mathfrak{I}(t') = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(x)$.

$t \equiv k$: $\mathfrak{I}(k\, {}^{x}\!/_{t'}) = \underset{\substack{\| \\ k^{\mathcal{A}}}}{\mathfrak{I}(k)} = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(k)$.

$t \equiv f t_1 \ldots t_n$: nach Induktionsvoraussetzung gilt für $1 \leq i \leq n$: $\mathfrak{I}(t_i \frac{x}{t'}) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(t_i)$

Also folgt

$$\mathfrak{I}(f t_1 \ldots t_n \tfrac{x}{t'}) \underset{\substack{\text{Def.}/\\ \text{S. 169}}}{=} \mathfrak{I}(f t_1 \tfrac{x}{t'}\, t_2 \tfrac{x}{t'} \ldots t_n \tfrac{x}{t'})$$

$$\underset{\substack{\text{Def } \mathfrak{I}\\ \text{S. 163}}}{=} f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1 \tfrac{x}{t'}), \ldots, \mathfrak{I}(t_n \tfrac{x}{t'}))$$

$$\underset{\text{Ind. Vor.}}{=} f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(t_n))$$

$$\underset{\text{Def. } \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}}{=} \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t')}(f t_1 \ldots t_n).$$

Das ist eine Interpretation wie jede andere

$\boxed{\text{Beh}}$

Nun folgt der Beweis von Lemma 30 durch Induktion über α:

$$\alpha \equiv t_1 = t_2: \quad \mathfrak{I}(\beta) \underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{Subst,}\\ \text{S. 169}}}{=} \mathfrak{I}(t_1 \tfrac{x}{t} = t_2 \tfrac{x}{t}) = W \iff$$

$$\iff \underbrace{\mathfrak{I}(t_1 \tfrac{x}{t})}_{= \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(t_1)} = \underbrace{\mathfrak{I}(t_2 \tfrac{x}{t'})}_{= \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(t_2)}$$

nach Beh.

$$\iff \underbrace{\mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(t_1 = t_2)}_{\mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(\alpha)} = W$$

$\alpha \equiv P t_1 \ldots t_n$: völlig analog.

$\alpha \equiv \alpha' \vee \alpha''$: $\quad \mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta) \underset{\substack{\text{Def. Subst}\\ \text{S. 169}}}{\Longleftrightarrow} \beta \equiv \beta' \vee \beta''$

und $\mathrm{Subst}(\alpha', x, t, \beta')$, $\mathrm{Subst}(\alpha'', x, t, \beta'')$

Also folgt:

$$\mathcal{I}(\beta) = W \underset{\text{Def. } \mathcal{I}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\mathcal{I}(\beta')}_{= \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\alpha')} = W \text{ oder } \underbrace{\mathcal{I}(\beta'')}_{= \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\alpha'')} = W$$

Induktions-voraussetzung

$$\underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\underbrace{\alpha' \vee \alpha''}_{\equiv \alpha}) = W.$$

$\alpha \equiv \neg \alpha'$: $\quad$ analog

$\alpha \equiv \bigvee_y \alpha'$: $\quad$ Gelte $\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta)$.

1. Fall: $\quad x \notin f(\alpha) \underset{\text{Def } f,\ S.167}{=} f(\alpha') \setminus \{y\}$

$$\underset{\substack{\text{Def. Subst}\\ \text{S. 169}}}{\Longrightarrow} \beta \equiv \alpha$$

nach Lemma 28, S. 168.1, denn auf $f(\alpha') \setminus \{y\} = f(\alpha)$ stimmen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}$ überein, weil x nicht in dieser Menge liegt

$$\Longrightarrow \mathcal{I}(\beta) = \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\alpha)$$

2. Fall $\quad x \in f(\alpha)$, $y \notin v(t)$, $\beta \equiv \bigvee_y \beta'$ und $\mathrm{Subst}(\alpha', x, t, \beta')$

nach Def. Subst, S. 169 unten

$$\mathcal{I}(\beta) = W \underset{\text{Def. }\mathcal{I}}{\iff} \text{es gibt } m_y \in A_s : \underbrace{\mathcal{I}_y^{m_y}(\beta')}\ = W$$

$$= \mathcal{I}^{m_y\ \mathcal{I}_y^{m_y}(t)}_{y\ \ x}(\alpha')$$

nach Induktionsvoraussetzung für die Interpretation $\mathcal{I}_y^{m_y}$

wegen $y \notin v(t)$ ist $\mathcal{I}_y^{m_y}(t) = \mathcal{I}(t)$, also

$$\iff \text{es gibt } m_y \in A_s : \underbrace{\mathcal{I}^{m_y\ \mathcal{I}(t)}_{y\ \ x}}(\alpha') = W$$

$$= \mathcal{I}^{\mathcal{I}(t)\ m_y}_{x\ \ \ y}$$

denn: $y \not\equiv x$ wegen $x \in f(\alpha)$, $y \notin f(\alpha)$

$$\iff \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}\Big(\underbrace{\bigvee_y \alpha'}_{\equiv \alpha}\Big) = W .$$

$\boxed{\text{Lemma 30}}$

4.5 Der Kalkül der Prädikatenlogik

Der Kalkül der Aussagenlogik (AL) beruht auf 4 Axiomen und einer Regel:

A1: $\alpha \vee \alpha \to \alpha$
A2: $\alpha \to \alpha \vee \beta$
A3: $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
A4: $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

Modus Ponens = MP