

## Übungsblatt 8

### Aufgabe 8.1:

(4+4 Punkte)

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein binärer Baum, in welchem jeder Knoten entweder *rot* oder *schwarz* eingefärbt wurde. Die Färbung muss zudem folgende Bedingungen erfüllen:

1. Blattknoten haben die Farbe *schwarz*;
  2. Jeder Knoten mit der Farbe *rot* hat zwei Kinder, welche die Farbe *schwarz* haben;
  3. Jeder Pfad von einem beliebigen Knoten zu seinen Blattknoten enthält die gleich Anzahl schwarzer Knoten. Wir nennen diese Anzahl *Schwarztiefe*.
- (a) Beweisen Sie, dass jeder Rot-Schwarz-Baum mit  $n$  inneren Knoten höchstens die Höhe  $2 \lg(n+1)$  besitzt.  
*Hinweis: Zeigen Sie zunächst via Induktion über die Höhe, dass ein Rot-Schwarz-Baum der Höhe  $h$  und Schwarztiefe  $s$  mindestens  $2^s - 1$  innere Knoten hat.*
- (b) Zeigen Sie, dass es zu jedem AVL-Baum auch eine Färbung gibt, die den Rot-Schwarz-Baum Bedingungen entspricht. Erfüllt umgekehrt jeder Rot-Schwarz-Baum die AVL-Baum Eigenschaft?

### Aufgabe 8.2:

(4+2 Punkte)

Gegeben ist ein leerer B-Suchbaum der Ordnung 2, wie er in der Vorlesung definiert wurde.

- (a) Fügen Sie nacheinander die Schlüssel F, S, Q, K, C, L, H, T, V, W, M, R, N, P in dieser Reihenfolge ein.
- (b) Löschen Sie anschließend die Schlüssel  $S, Q, R$  in dieser Reihenfolge.

Dokumentieren Sie die Konfiguration des Baumes vor und nach jedem Teilen eines Knotens. Ein Blatt kann durch einen Punkt  $\cdot$  angedeutet werden.

### Aufgabe 8.3:

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jeden B-Suchbaum der Ordnung  $t \geq 2$  mit  $n \geq 1$  Schlüsseln und Höhe  $h$  gilt:

$$h \leq 1 + \log_t \frac{n+1}{2}.$$

*Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele Knoten der B-Baum mit Höhe  $h$  mindestens haben muss.*

**Aufgabe 8.4:**

(2+2+2 Punkte)

Gegeben sei ein leerer Max-Heap, wie er in der Vorlesung definiert wurde.

- (a) Fügen Sie nacheinander die Schlüssel 3, 1, 2, 4, 8, 7, 0 in aufsteigender Reihenfolge ein.
- (b) Löschen Sie anschließend die Schlüssel 0, 2 und 8 in dieser Reihenfolge.
- (c) Zeigen Sie, dass die Bauzeit (Laufzeit von Build-Heap) für einen Heap mit  $n$  Schlüsseln in  $O(n)$  liegt.

Dokumentieren Sie die Konfiguration des Heaps als Binärbaum vor und nach jeder Operation.

**Aufgabe 8.5:**

(4 Zusatzpunkte)

Betrachten Sie ein elektrisches Binärzählwerk mit beliebig vielen Ziffern aus  $\{0, 1\}$ . Das Umschalten einer Ziffer kostet eine Stromeinheit. Das Zählwerk ist mit 0 initialisiert und wird durch wiederholtes Inkrementieren auf  $n$  erhöht. Zeigen Sie, dass die entstandenen Gesamtkosten in  $\Theta(n)$  liegen. Schließen Sie dann auf die amortisierten Kosten für eine einzelne Erhöhung des Zählers, indem Sie die Gesamtkosten durch  $n$  teilen.