Algorithmen und
Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2017/18

Abgabe: 19.12.2017, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 2

PD Dr. Elmar Langetepe
David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 10

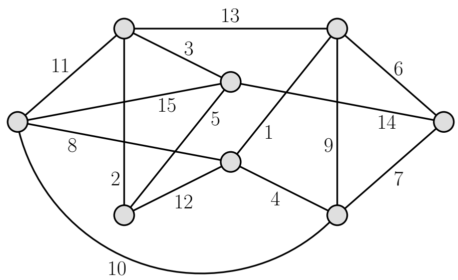
Aufgabe 10.1: (6 Punkte)

Wir betrachten die erste *Union-Find*-Datenstruktur aus der Vorlesung, d. h. ein n-elementiges Feld A, in dem für jedes Element $i \in \{1, \ldots, n\}$ gespeichert ist, zu welcher Menge es gehört. Zusätzlich ist für jede Menge ihre Größe und eine Liste der Elemente der Menge gegeben.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit für jede Folge von Union-Operationen auf n Elementen höchstens $O(n \log n)$ ist. Wie sieht eine Folge solcher Union-Operationen auf n Elementen aus, deren Laufzeit wirklich $\Theta(n \log n)$ beträgt? Beweisen Sie Ihre Aussage. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall, dass n eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 10.2: (4+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum des folgenden Graphen.



(b) Einige Probleme lassen sich mithilfe einer Divide-and-Conquer-Strategie lösen. Wir wollen diesen Ansatz für die Berechnung von minimalen Spannbäumen untersuchen.

Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtung $w\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$ und eine Bipartition (V_1, V_2) der Knotenmenge V. Es seien E_1 und E_2 die Mengen der Kanten $\{u, v\}$ mit $u, v \in V_1$ bzw. $u, v \in V_2$. Wir nehmen an, dass die Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zusammenhängend sind. Ein Divide-and-Conquer-Ansatz könnte wie folgt aussehen.

1. Bestimme minimale Spannbäume von G_1 und G_2.
2. Bestimme eine kostenminimale Kante zwischen Knotenmenge V_1 und Knotenmenge V_2.
3. Vereinige die beiden Spannbäume und die Kante zu einem Spannbaum von G.

Geben Sie ein Beispiel für G, V_1 und V_2 an, bei dem dieser Ansatz keinen minimalen Spannbaum liefert.

Aufgabe 10.3: (2+4+2 Punkte)

Gegeben sei ein zusammenhängender ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtung $w\colon E \to R_{>0}$. Wir wollen in Zeit $O(|E| \log |E|)$ einen **maximalen** Spannbaum von G bestimmen, d. h. einen Spannbaum T mit maximalem Gewicht $w(T)$. Dazu wollen wir aus w eine Kantengewichtung w' konstruieren und den Algorithmus von Kruskal auf die Eingabe (G, w') anwenden. Damit diese Vorgehensweise korrekt ist, muss gelten:

$$T \text{ ist minimaler Spannbaum bzgl. } w' \Longrightarrow T \text{ ist maximaler Spannbaum bzgl. } w \tag{1}$$

(a) Wir betrachten die folgende Eigenschaft:

$$\text{Für alle Spannbäume } T_1 \text{ und } T_2 \text{ gilt } w'(T_1) \leq w'(T_2) \Longrightarrow w(T_1) \geq w(T_2) \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Eigenschaft (1) aus Eigenschaft (2) folgt.

(b) Untersuchen Sie für $w'(e) = \frac{1}{w(e)}$ und für $w'(e) = W - w(e)$ mit $W = 1 + \max\{w(e') : e' \in E\}$, ob Eigenschaft (2) gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Hinweis: Alle Spannbäume von G haben genau $|V| - 1$ Kanten.

(c) Wir betrachten diejenige Funktion w' aus Aufgabenteil (b), für die Eigenschaft (2) nicht erfüllt ist. Zeigen Sie, dass dennoch Eigenschaft (1) erfüllt ist. Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, dass der minimale Spannbaum bzgl. w' eindeutig ist.

Aufgabe 10.4: (4 Punkte)

Seien $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit einer Kantengewichtung $w\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$, C ein Kreis in G und e eine teuerste Kante von C. Zeigen Sie, dass es einen minimalen Spannbaum von G gibt, der die Kante e nicht enthält.

Hinweis: Nutzen Sie Ideen aus dem Korrektheitsbeweis des Algorithmus von Kruskal.

Aufgabe 10.5: (4 Zusatzpunkte)

Wir betrachten den folgenden Algorithmus, der als Eingabe einen nichtleeren ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und eine Kantengewichtung $w\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$ erhält.

Prim(G, w)

1. **if** (G ist nicht zusammenhängend) **then return** „G ist nicht zusammenhängend.“
2. Wähle einen Knoten $v_0 \in V$.
3. Setze $V_T = \{v_0\}$ und $T = \emptyset$.
4. **for** $i = 1, \ldots, |V| - 1$ **do**
5. Bestimme eine gewichtsminimale Kante $e_i = \{u_i, v_i\}$ mit $u_i \in V_T$ und $v_i \notin V_T$.
6. Setze $V_T = V_T \cup \{v_i\}$ und $T = T \cup \{e_i\}$.
7. **end for**
8. **return** T

Zeigen Sie, dass der Algorithmus Prim einen minimalen Spannbaum von G bezüglich der Gewichtsfunktion w berechnet, sofern G zusammenhängend ist.