Offline Bewegungsplanung: Berechnung ZAZ

Elmar Langetepe
University of Bonn

Rekursive Zerlegung: Polynom. Bedingungen!

- $\hat{P}(X_n) := P_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(X_n)$
- $r := \mathrm{grad}_{X_n}(\hat{P}(X_n))$ Grad Variable X_n
- Anzahl versch. reellw. Nullst. in $\hat{P}(X_n)$
- $r - \mathrm{grad}_{X_n}\left(\mathrm{ggT}\left(\hat{P}(X_n), \underbrace{\hat{P}'(X_n)}_{\text{Ableitung nach } X_n}\right)\right)$
- Also Grad von $\hat{P}(X_n) := P_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(X_n)$ konstant halten und Anzahl der gemeinsamen Nullst. von $\hat{P}(X_n)$ und $\hat{P}'(X_n)$ konstant halten!

Rekursive Zerlegung: Polynom. Bedingungen!

- Allgemeiner: Anzahl gemeinsamer Nullstellen zweier Polynome $A(X)$ und $B(X)$ mit Grad a respektive Grad b
- Betrachte dazu für $(0 \leq j \leq \min\{a, b\} - 1)$ Polynome $U_j(X)$ mit Grad $b - j - 1$, und $V_j(X)$ mit Grad $a - j - 1$
- Sollen Gleichung $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X) = 0$ genügen
- U_j hat $b - j$ Koeffizienten u_i
- V_j hat $a - j$ Koeffizienten v_i
- Polynom $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X)$ Grad $a + b - j - 1$

Rekursive Zerlegung: Polynom. Bedingungen!

Lemma 3.11: Genau dann wenn $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X) = 0$ (für kleinstes j) eine nicht-triviale Lösung hat, haben die Polynome $A(X)$ und $B(X)$ $j+1$ gemeinsame Nullstellen.

Beweis!

Beweis Lemma 3.11!

"$\Rightarrow$"

- $A(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_a)$, $B(X) = (X - \beta_1) \cdots (X - \beta_b)$
- $U_j(X) = (X - \mu_1) \cdots (X - \mu_{b-j-1})$,
  $V_j(X) = (X - \nu_1) \cdots (X - \nu_{a-j-1})$
- j kleinste Zahl: $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X) = 0$ nicht-triviale Lsg.
- Dann gilt $\mu_r \neq \nu_s$, $r \in [1, b-j-1]$, $s \in [1, a-j-1]$
- Sonst Linearfaktor abspalten, Widerspruch kleinstes
- Faktorisierung von $A(X)U_j(X)$ und $B(X)V_j(X)$
- Jede Nullstelle U_j/V_j ist Nullstelle von B/A
- A und B haben noch $j+1$ gemeinsame (Gleichung)!

Beweis Lemma 3.11!

"$\Leftarrow$"

- $A(X)$ und $B(X)$ haben $j+1$ gemeinsame Nullstellen
- Restlichen $a-(j+1)$ Nullstellen von A bilden V_j
- Restlichen $b-(j+1)$ Nullstellen von A bilden U_j
- $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X) = 0$ hat eine nicht-triviale Lösung

Rekursive Zerlegung: Polynom. Bedingungen!

- LGS: $A(X)U_j(X) - B(X)V_j(X) = 0$
- $a + b - j$ Gleichungen, $a + b - 2j$ Unbekannte
- Betrachte erste $a + b - 2j$ Koeffizienten
- LGS mit $a + b - 2j$ Unbekannten und $a + b - 2j$ Gleichungen
- $\psi_j(A, B)$ die Determinante der Matrix dieses LGS

Theorem 3.12: Die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von A und B ist die kleinste Zahl j, so dass $\psi_j(A, B) \neq 0$ gilt.

Beispiel: Polynom. Bedingungen!

$A(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ und $B(X) = 2X^2 - 6X + 4$, dann ist $(0 \leq j \leq \min\{a, b\} - 1 = 1)$.

Zeige: $\psi_0(A, B) = 0$ und $\psi_1(A, B) = 0$, dann mindestens zwei gemeinsame Nullstellen:

$(X - 3)(X - 2)(X - 1) = A(X)$ und $2(X - 2)(X - 1) = B(X)$

Rekursive Zerlegung: Polynom. Bedingungen!

Theorem 3.12: Die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von A und B ist die kleinste Zahl j, so dass $\psi_j(A, B) \neq 0$ gilt.

Beweis: Tafel!

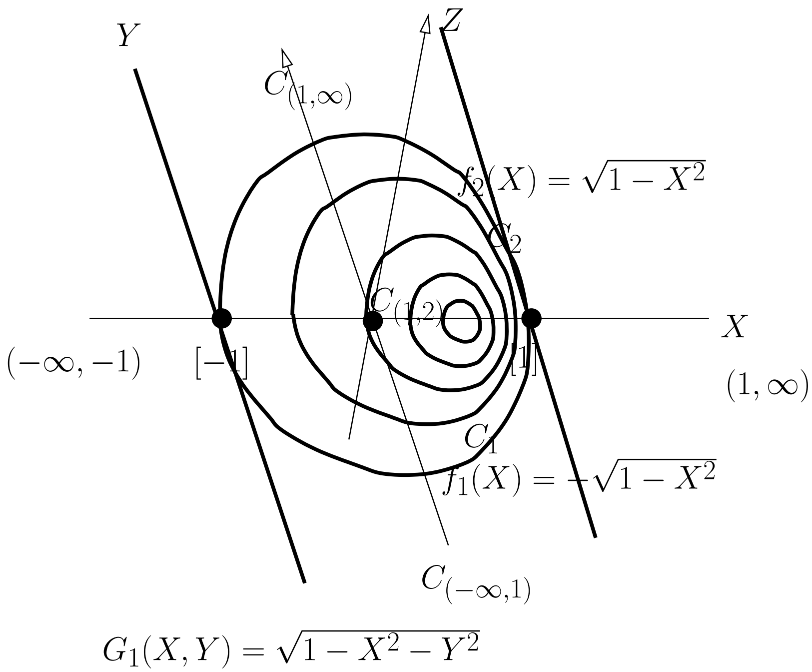
Beispiel: ZAZ berechnen!

- $P(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$, 3 dimensional
- Grad von $\hat{P}(X_n) := P_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(X_n)$ und Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von $\hat{P}(X_n)$ und $\hat{P}'(X_n)$ konstant halten
- $P_{X,Y}(Z)$ konstant Grad 2
- $P_{X,Y}(Z) = Z^2 + (X^2 + Y^2 - 1) =: A(Z)$ und $P'_{X,Y}(Z) = 2Z =: B(Z)$
- Anzahl gemeinsamer Nullstellen?
- $(0 \leq j \leq \min\{a,b\} - 1 = 0)$, $j = 0$: $U_0(Z) = u_0$, Grad $b - j - 1 = 0$ und $V_0(Z) = v_1 Z + v_0$, Grad $a - j - 1 = 1$
- $A(Z)U_j(Z) - B(Z)V_j(Z) = u_0(Z^2 + (X^2 + Y^2 - 1)) - (v_1 Z + v_0)2Z = (u_0 - 2v_1)Z^2 - 2v_0 Z + u_0(X^2 + Y^2 - 1) = 0$
- Bedingung: $Q(X,Y) = (X^2 + Y^2 - 1)$

Beispiel: ZAZ berechnen!

Wie sieht die ZAZ für $P(X, Y, Z) = Z^2 + X^2 + Y^2 - 1$ nun aus?

ZAZ für $Q(X, Y) = (X^2 + Y^2 - 1)$ hatten wir schon berechnet!



Bedingungen allgemein aufstellen!

Theorem 3.13:

Sei $P_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}(X_n)$ gegeben und der Grad X_n in P sei k. Für $j = 0, \ldots, k$ sei $Q_j(X_1, \ldots, X_{n-1})$ der Koeffizient von $P_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}(X_n)$ mit Grad j. Sei $P_{(j,(X_1,\ldots,X_{n-1}))}(X_n)$ die Summe aller Terme des Polynoms $P_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}(X_n)$ mit Grad $\leq j$ in X_n. Wir definieren weiterhin $R_{(j,l)} := \psi_l \left(P_{(j,(X_1,\ldots,X_{n-1}))}(X_n), P'_{(j,(X_1,\ldots,X_{n-1}))}(X_n) \right)$ für $l = 0, \ldots, j-2$. Sei $\mathcal{Q}$ die Menge der Polynome aus Q_j und $R_{(j,l)}$. Dann gilt: Die Anzahl der verschiedener Nullstellen von $P_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}(X_n)$ ist konstant falls alle Polynome aus $\mathcal{Q}$ ein konstantes Vorzeichen haben.

Weiteres Beispiel dazu!

$$P(X,Y,Z) = (Y^2 - 1)Z^2 + XZ + X^2 + Y^2 - 1$$