Offline Bewegungsplanung: Part Feeding

Elmar Langetepe
University of Bonn

Ergebnis: Theorem 4.5!

Gegeben sei eine Liste von n Kanten, die die konvexe Hülle eines gegebenen Werkstücks repräsentieren. Dann läßt sich in Zeit $O(n^2 \log n)$ die kürzeste Sequenz von Greifaktionen finden, die eine Orientierung des Werkstücks bis auf Symmetrie garantiert. Der gefundene Plan hat eine Länge von $O(n^2)$.

Beweis!

Theorem 4.5! Korrektheit!!

1. Orientiert Werkstück eindeutig bis auf Symmetrie:

   Der Algorithmus findet einen Plan, der ein s-Intervall Θ der Länge T (kleinste Periode) auf einen Punkt θ' abbildet!

   $\Theta + T$ wird auf $\theta' + T$ abgebildet!

2. Es gibt keinen kürzeren Plan mit dieser Eigenschaft

Zu 1) Wie gesehen, sukzessive:

- $s(\Theta_i) = [s(\xi_i), s(\nu_i)]$, $\Theta_{i-1} = [\xi_{i-1}, \nu_{i-1}]$, $|s(\Theta_i)| < |\Theta_{i-1}|$
- $\xi_{i-1} \leq s(\theta) - s(\xi_i) + \xi_{i-1} \leq \nu_{i-1}$

- $s(\theta) - (s(\xi_i) - \xi_{i-1})$, bereits: $s(\theta)$ durch α_i
- $+\alpha_i$ wegen bereits durchgeführter Drehungen
- Immer von der Startrichtung aus drehen!!
- $s(s(\theta) - (s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i)) \in s(\Theta_{i-1})$
- Mit Dreh. $s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i$ nach $s(\Theta_{i-1})$
- $\alpha_{i-1} := s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \alpha_i$
- $\varepsilon_{i-1} = \frac{1}{2}\left(|\Theta_j| - |s(\Theta_{j+1})|\right)$
- $\alpha_{i-1} := s(\xi_i) - \xi_{i-1} + \varepsilon_{i-1} + \alpha_i$

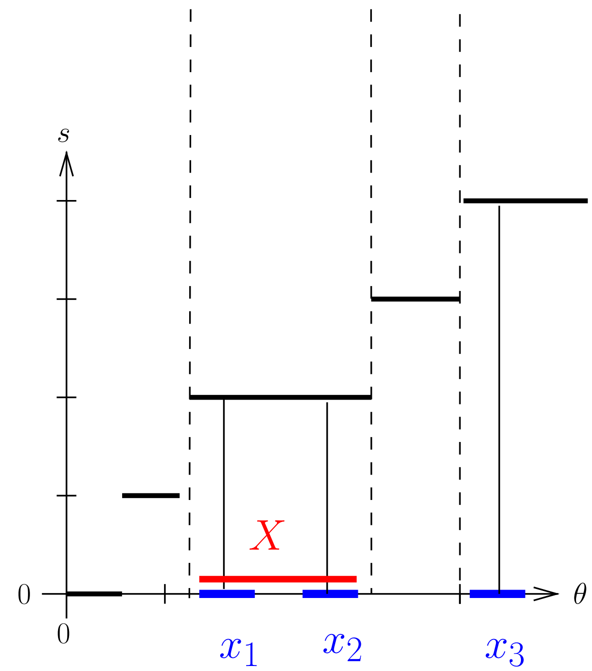
Theorem 4.5! Bis auf Symmetrie (1)!

- Sei Θ letztes Intervall des Alg.
- Θ muss die Länge T haben (falls terminiert!)
- Algorithmus findet Plan, der s–Intervall Θ der Länge T auf einen Punkt θ' abbildet
- T ist kleinste Periode der Greiffunktion des Werkstücks
- Für jeden Plan $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\theta + T) = \mathcal{A}(\theta) + T$ (Lemma 4.3!)
- Dann gilt: $\mathcal{A}(\theta + T) = \theta' + T$

Theorem 4.5! Kleinster Plan (2)!

Lemma: Jeder Plan, der $\Theta \subseteq [0, \pi)$ auf einen Punkt θ abbildet, bildet auch das kleinste zusammenhängende Intervall, das Θ enthält, auf θ ab.

- Θ nicht zs-hängend
- Θ' kleinstes zs-hängende Intervall, das Θ enthält.
- $s(\Theta') = s(\Theta)$ wg. Monot.
- Erste Greifaktion in gleiches s-Intervall
- Gleiche Aktionen



Theorem 4.5! Kleinster (2)!

- Ann.: Es ex. solcher Plan $\mathcal{A}'$ mit weniger Schritten als $\mathcal{A}$
- Sei $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_i)$ die Liste der s–Intervalle des Algorithmus
- $(\Theta'_1, \Theta'_2, \ldots, \Theta'_j)$ seien die zum Plan $\mathcal{A}'$ gehörenden Intervalle, erweitert auf zusammenhängende Intervalle!
- Θ_i bildet auf Θ_{i+1}, Θ'_i auf Θ'_{i+1} ab
- Das s-Image von Θ_{i+1} ist kleiner als Θ_i, s-Image von Θ'_{i+1} ist kleiner als Θ'_i
- Folge der Θ_i, Θ'_i wird sukzessive größer, bis T
- Aufgrund des Algorithmus gilt $|\Theta_1| \geq |\Theta'_1|$
- Da $\mathcal{A}'$ nach j Schritten terminiert, $\mathcal{A}$ jedoch nicht, muss $|\Theta_j| < |\Theta'_j|$ gelten

- Es existiert ein k mit $|\Theta_k| \geq |\Theta'_k|$ und $|\Theta_{k+1}| < |\Theta'_{k+1}|$
- $|s(\Theta'_{k+1})| < |\Theta'_k| \leq |\Theta_k|$
- Widerspruch: Algorithmus hätte das größere Intervall Θ'_{k+1} gewählt

Theorem 4.5! Vollständigkeit!!

Für jedes polygonale Werkstück finden wir einen solchen Plan!

- Zu zeigen: Der Algorithmus terminiert stets!
- Technik: Funktion $s : S^1 \to S^1$ auf X-Achse erweitern
- Aussage: Wir finden stets eine Sequenz von s-Intervallen $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_i)$, so dass das s-Image von Θ_{i+1} kleiner ist als Θ_i
- Bis wir bei Periode T landen
- Für jedes s-Intervall ex. größeres s-Intervall mit der Eigenschaft, bis zur Periode
- h Größe des bisherigen s-Intervals, $h = T$ fertig!
- Bedeutet: $\forall \theta \;\; s(\theta + h) = s(\theta) + h$

Theorem 4.5! Vollständigkeit!!

Für jedes polygonale Werkstück finden wir einen solchen Plan!

- h Größe des bisherigen s-Intervalls, $h < T$!
- $\forall \theta \;\; s(\theta + h) = s(\theta) + h$ gilt nicht!
- Ann: $\exists \theta : \;\; s(\theta + h) - s(\theta) < h$
- $\Theta_j = [\theta_j, \theta_j + h)$ bisheriges s-Interval
- Betrachte $\Theta = [\theta, \theta + h]$
- s-Image: $|s(\Theta)| < h = |\Theta_j|$
- Intervall Θ nach rechts/links erweitern, geht immer!
- Bis zur nächsten Unstetigkeitsstelle!
- Nächstes Intervall gefunden! Größer!

Theorem 4.5! Vollständigkeit!!

(i) Entweder ein größeres s–Intervall, dessen s–Image kleiner ist: falls $\exists\theta : s(\theta + h) - s(\theta) < h$,

(ii) oder h ist die Periode der Greiffunktion: $\forall\theta : s(\theta + h) = s(\theta) + h$.

Ausschließen: $\forall\theta : s(\theta + h) - s(\theta) > h$

$\theta \in [0, T)$

Theorem 4.5! Vollständigkeit!!

Ausschließen: $\forall \theta \in [0,T) : s(\theta+h) - s(\theta) > h$

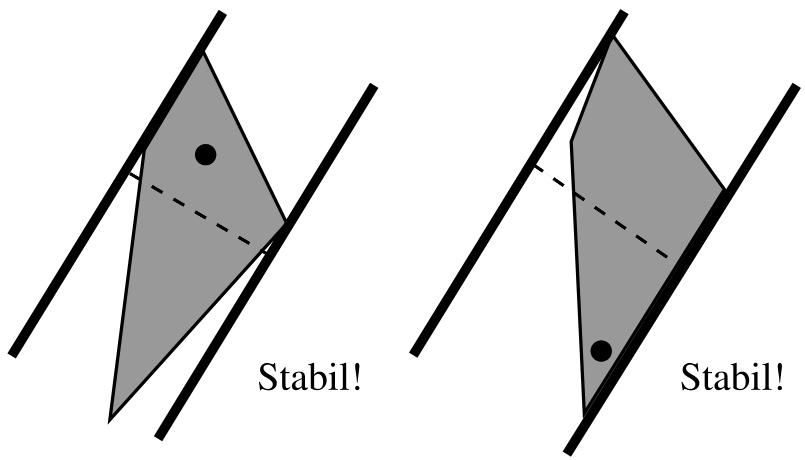
$$\begin{aligned}
\int_0^T s(\theta+h) - s(\theta) - h \, d\theta &= \int_h^{T+h} s(\theta)\, d\theta - \int_0^T s(\theta)\, d\theta - hT \\
&= -\int_0^h s(\theta)\, d\theta + \int_T^{T+h} s(\theta)\, d\theta - hT \\
&= -\int_0^h s(\theta)\, d\theta + \int_0^h s(\theta) + T\, d\theta - hT \\
&= -\int_0^h s(\theta)\, d\theta + \int_0^h s(\theta)\, d\theta + hT - hT \\
&= 0 \text{ Nur positiv geht nicht!}
\end{aligned}$$

Theorem 4.5! Laufzeit $O(n^2 \log n)$!!

- Diameter Fkt., Greif. Fkt. $O(n)$
- n Intervalle mit Stetigkeit: $O(n)$
- $O(n^2)$ viele s-Intervalle X, sortieren nach $|s(X)|$
- In While Schleife verwenden
- Plan in $O(i)$, $i \in O(n^2)$
- Dominiert durch $O(n^2 \log n)$
- Länge des Plans in $O(n^2)$

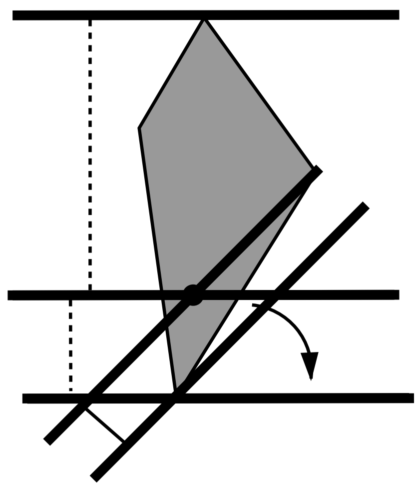
Unrealistische Annahme!

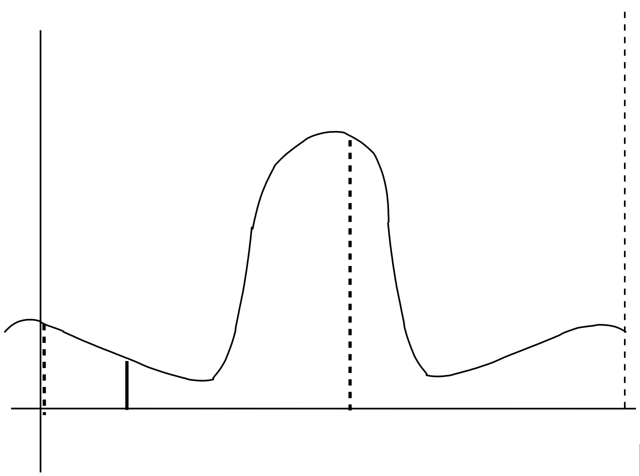
- Praxis Massenschwerpunkt beeinflusst das Ergebnis
- Eine Backe trifft zuerst
- Festlegen welche!



Radius-Funktion

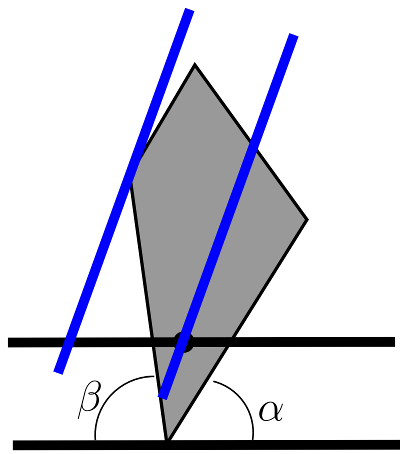
- Eine Backe trifft zuerst
- Massenschwerpunkt und ausgewählte Backe
- Funktion mit Winkel α
- Massenschwerpunkt und Backe

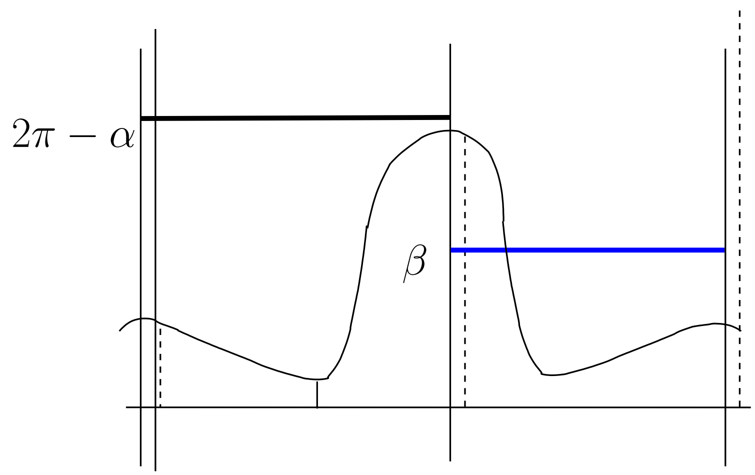




Push-Funktion

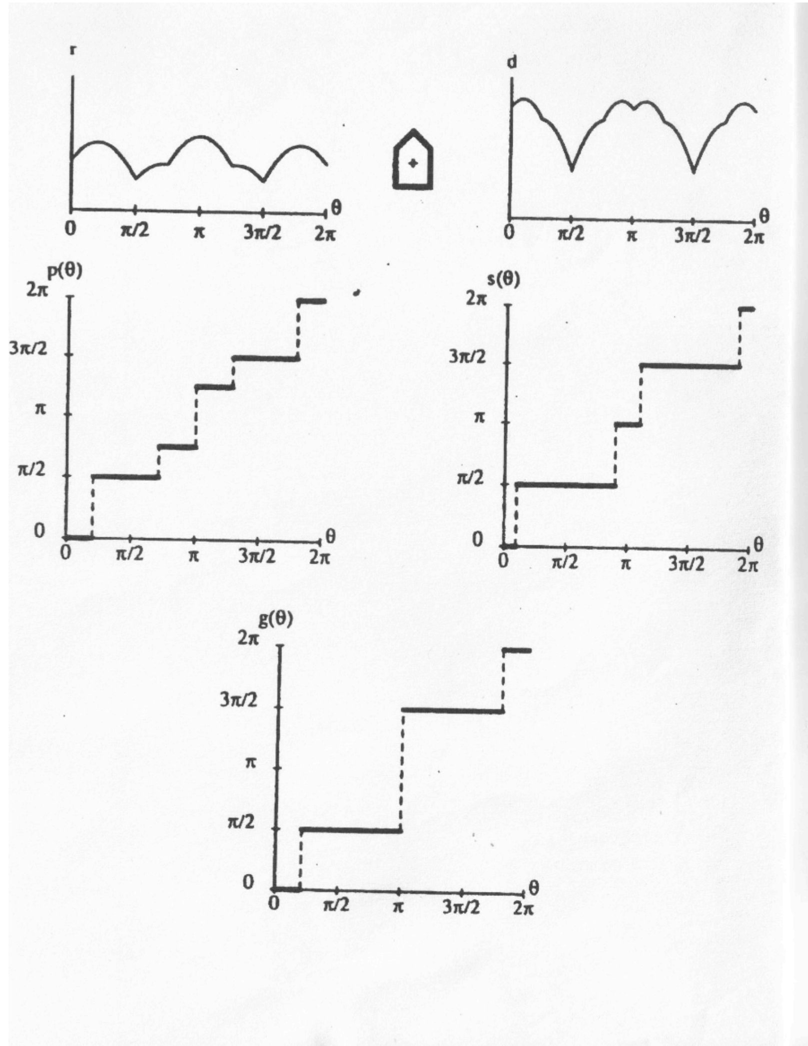
- Eine Backe trifft zuerst
- Treppenfkt.: Zwischen zwei Maxima auf ein Minima
- Funktion bezüglich Backe
- Genau wie Squeeze Funktion





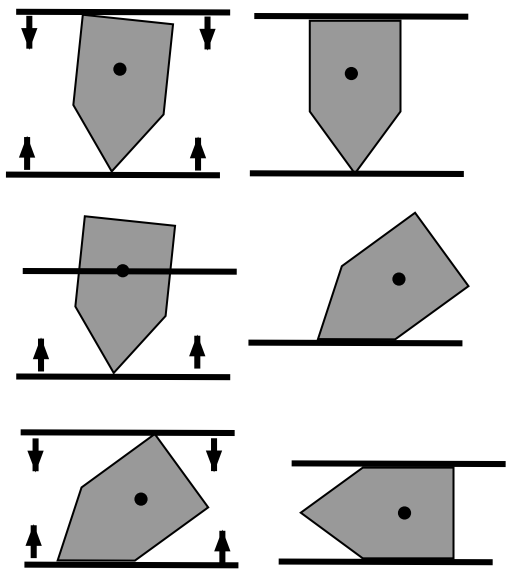
Realistische Pläne

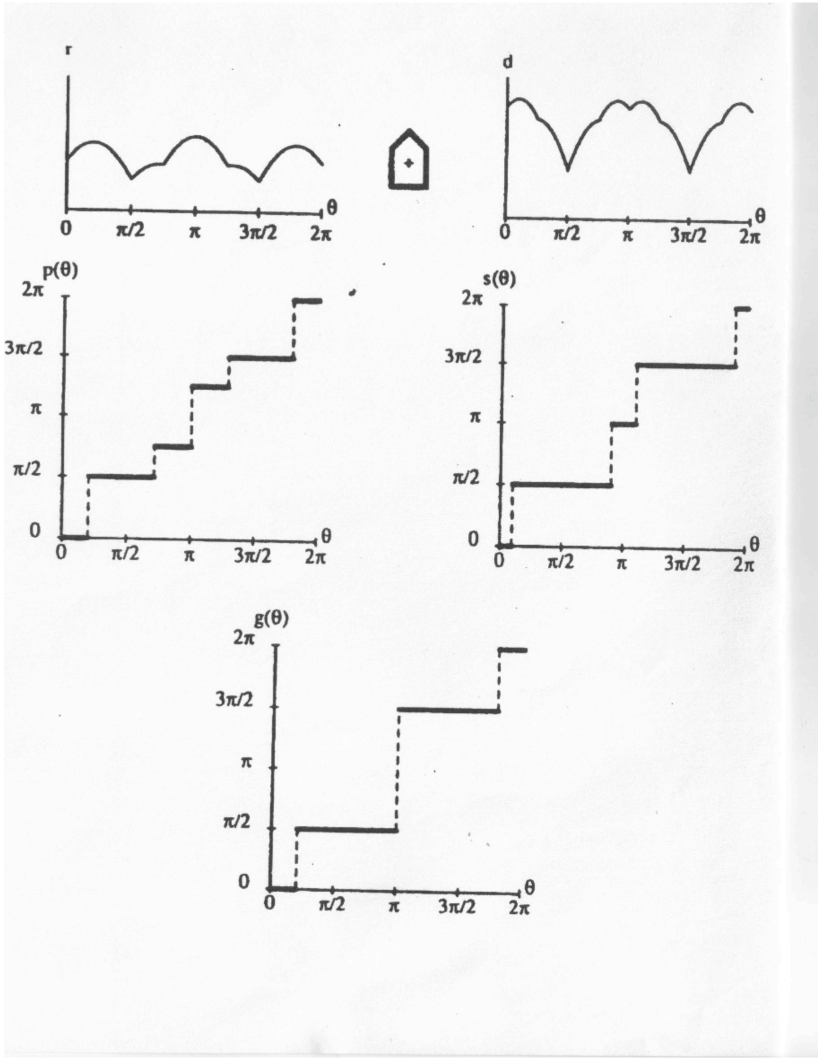
- Zuerst eine Push-Operation
- Danach eine Greifoperation
- Bei Greifoperation somit beide Backen gleichzeitig
- s ist Greiffunktion, p ist Schiebefunktion
- Transferfunktion $g = s \circ p$



Unterschied!

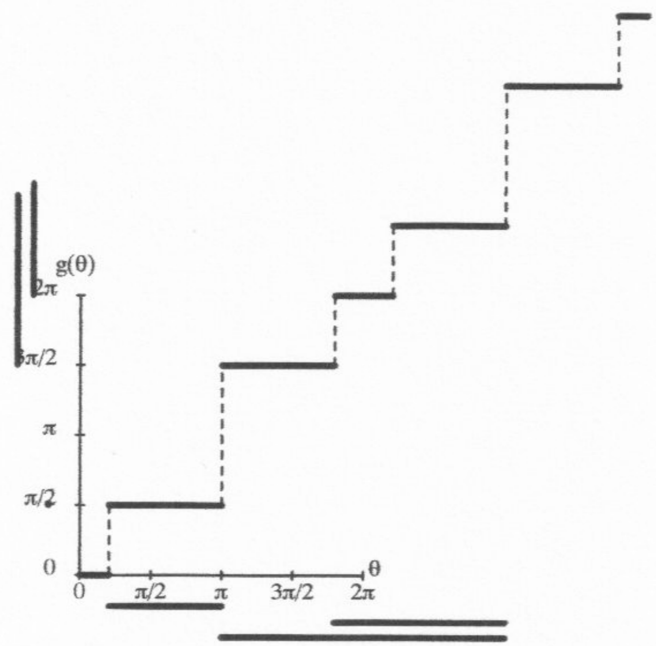
- Winkel $\pi - \epsilon$
- Greifoperation
- Pushoperation
- Push und Greif.Op





Plan für Transferfunktion

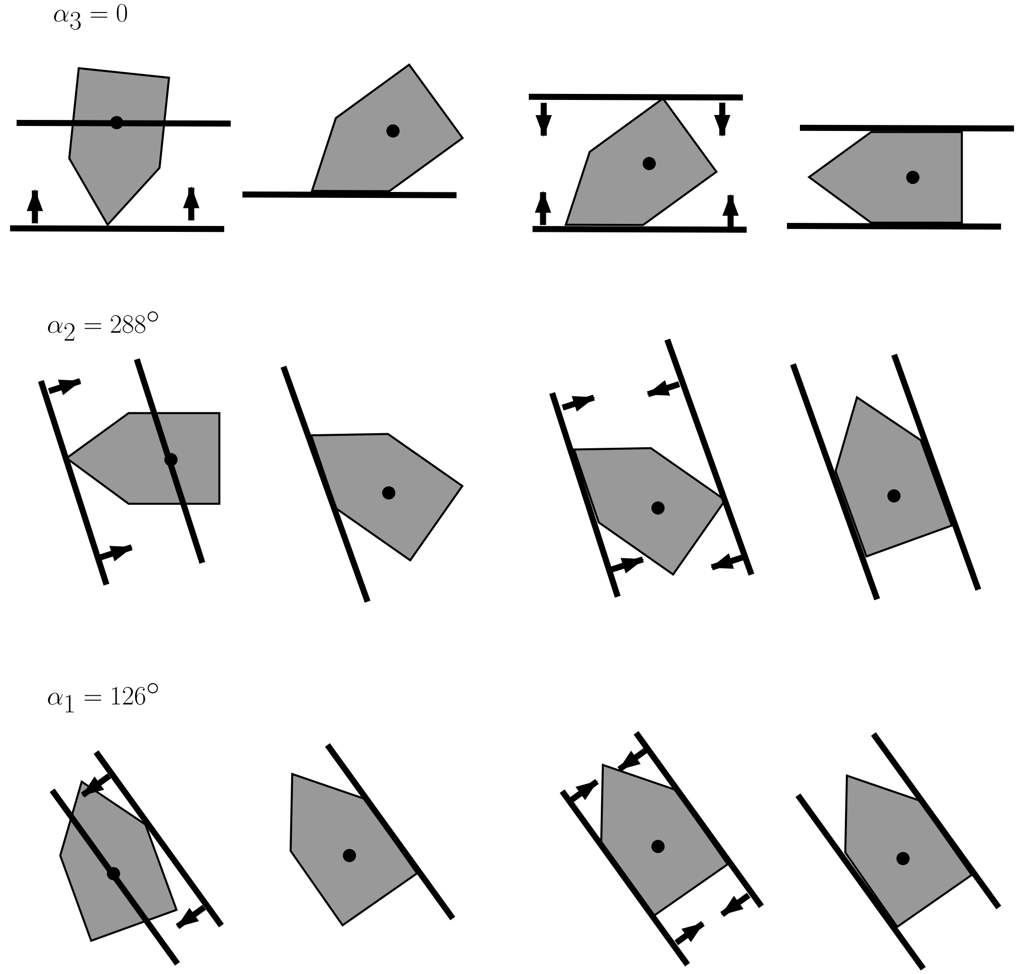
- $\Theta_1 = [\pi/2 - x, \pi)$
- $\Theta_2 = [2\pi - x, 3\pi)$,
  $|s(\theta_2)| = \pi/2$
- $\Theta_3 = [\pi, 3\pi)$,
  $|s(\theta_3)| = \pi$
- Periode 2π!



Plan für Transferfunktion

- $\Theta_1 = [\pi/2 - x, \pi)$
- $\Theta_2 = [2\pi - x, 3\pi)$,$|s(\theta_2)| = \pi/2$
- $\Theta_3 = [\pi, 3\pi)$, $|s(\theta_3)| = \pi$
- $\alpha_3 := 0$
- $\alpha_2 = s(\pi) - (2\pi - x) + 0 - x/2 = -\pi/2 + x/2$
- Mod.: $\alpha_2 = (3\pi/2 + x/2) \approx 288°$
- $\alpha_1 = s(2\pi - x) - (\pi/2 - x) + \alpha_2 - x/2 =$
  $3\pi/2 + x + \alpha_2 - x/2 = \pi + x \approx 126°$

Plan für Transferfunktion



- $\alpha_3 := 0$
- $\alpha_2 \approx 288°$
- $\alpha_1 \approx 126°$