

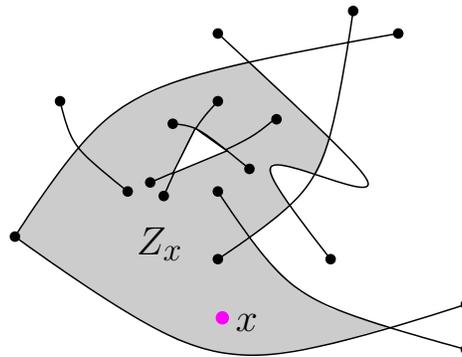
Offline Bewegungsplanung: Zellen eines Konfigurationsraumes

Elmar Langetepe
University of Bonn

Zellen: Th. 2.18

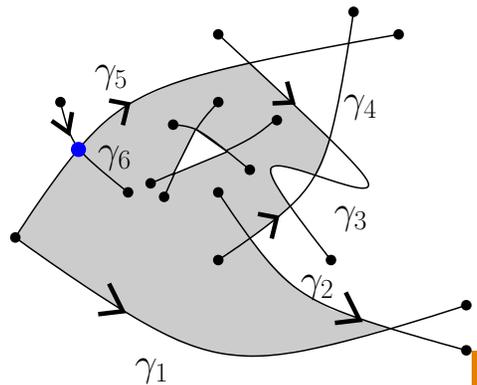
A Arrangement von n Kurvenstücken von denen sich zwei nur s mal schneiden. Jede Zelle von A hat Komplexität $O(\lambda_{s+2}(n))$. ■

Weniger als $\Omega(n^2)$!! ■ Beweis!! ■



Beweis: Th. 2.18

- Rand zerfällt in mehrere Zyklen
- Analyse: Äußerer Zyklus C reicht! $\lambda_s(n)$, n Segmente
- Bezeichnen, orientieren: links nach rechts
- Zyklische Abfolge
 $S = \langle \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- \rangle$
- $2n$ Segmente γ_i^-, γ_i^+

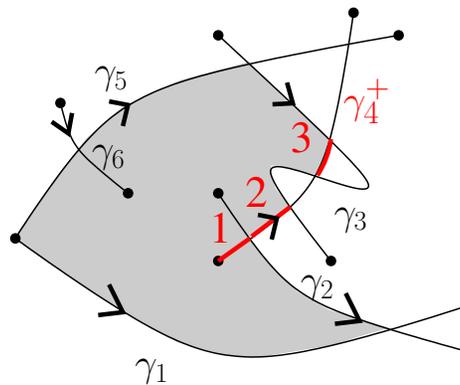


Bogenteile in Reihenfolge! **Lem. 2.19**

- Zyklische *Folge* des Zyklus C :

■ $S = \langle \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- \rangle$ ■

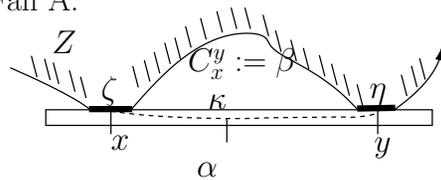
- Bogen γ_i : ■ Segmente von γ_i^+ (γ_i^-) erscheinen in C in derselben Reihenfolge wie entlang von γ_i^+ (γ_i^-) ■
- Beispiel γ_4^+ ! ■ Beweis! ■



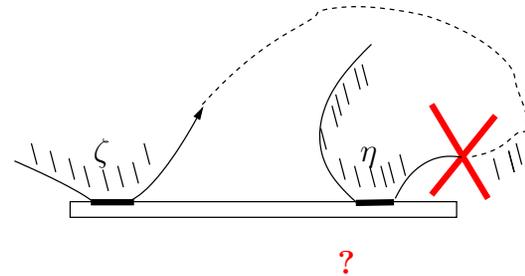
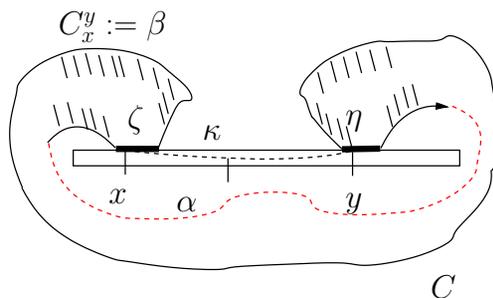
Beweis: Konsistenzlemma 2.19

- γ_i etwas aufblasen; $\zeta, \eta \in \gamma_i^*$ konsekutive Subsegmente in C !
- Nur zwei Fälle gemäß Innerem; sonst keine Verbindung!!
- Betrachte α und $\beta := C_x^y$
- β berührt γ_i^* nicht: Konsekutiv in C !
- C schnittfrei: $\alpha \cup \beta$ trennt κ von C ab!

Fall A:



Fall B:



Lineare Sequenz S'' bilden!

- Zyklische Sequenz:

■ $S = \langle \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- \rangle$ auftrennen ■

- Orientierte Sequenz:

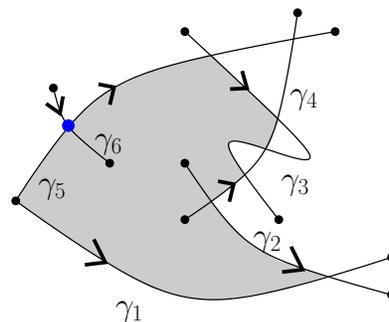
$S' = \{ \gamma_5^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_5^- \gamma_6^+ \gamma_6^- \}$ ■

- Orientierte Reihenfolge stimmt nicht! Bsp.: γ_5^- ■

- Verdoppeln: $\gamma_i^- (\gamma_i^+) \Rightarrow \gamma_{i,1}^-, \gamma_{i,2}^- (\gamma_{i,1}^+, \gamma_{i,2}^+)$ ■

- Nun $4n$ Segmente: Sequenz

$S'' = \{ \gamma_{5,1}^- \gamma_1^+ \gamma_2^- \gamma_4^- \gamma_4^+ \gamma_2^- \gamma_2^+ \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_4^+ \gamma_3^- \gamma_{5,2}^- \gamma_6^+ \gamma_6^- \}$ ■



S'' DSS mit $(4n, s + 2)$: **Lem. 2.20**

- Definition DSS
- Zwischen zwei $\gamma_{i,j}^-$ ($\gamma_{i,j}^+$) kommt stets anderes Segment vor
- Zz.: Zwei Buchstaben ζ und η wechseln nicht mehr als $s + 2$ mal
- Widerspruchsbeweis: Annahme $s + 3$ Wechsel!
- Situation:
$$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots))$$

Lem. 2.20

$$S'' = (\cdots \zeta_1 \cdots \eta_1 \cdots \zeta_2 \cdots \eta_2 \cdots \cdots \zeta_j \cdots \eta_j \cdots \zeta_k \cdots (\eta_k \cdots)) \blacksquare$$

■ Fasse je vier zusammen:

$$\begin{aligned} & (\zeta_1, \eta_1, \zeta_2, \eta_2) \\ & \quad (\eta_1, \zeta_2, \eta_2, \zeta_3) \\ & \quad \quad (\zeta_2, \eta_2, \zeta_3, \eta_3) \\ & \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

■ Jeweils Schnitt zw. $((\zeta_1, \zeta_2), (\eta_1, \eta_2)), ((\eta_1, \eta_2), (\zeta_2, \zeta_3)), \dots \blacksquare$

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!! ■

$((s + 3)$ gerade Übung!) ■

Lem. 2.20

$s + 3$ ungerade: η_k ex. und $k = \frac{s+2}{2} + 1$ Induktion!!

$$\begin{aligned} & (\zeta_1, \eta_1, \zeta_2, \eta_2) \\ & \quad (\eta_1, \zeta_2, \eta_2, \zeta_3) \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad (\zeta_{\frac{s+2}{2}}, \eta_{\frac{s+2}{2}}, \zeta_{\frac{s+2}{2}+1}, \eta_{\frac{s+2}{2}+1}) \end{aligned}$$

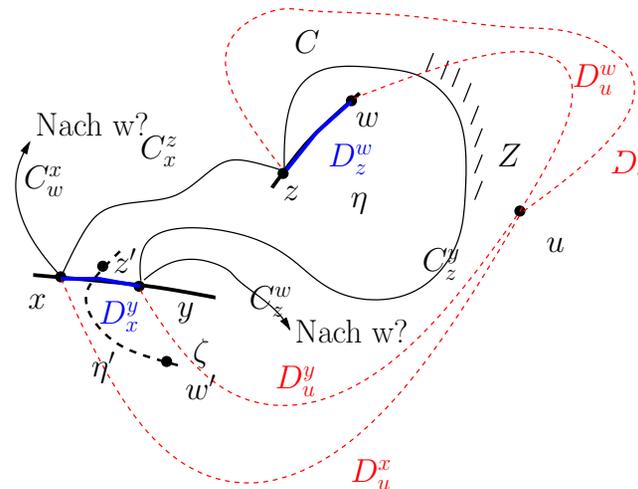
ζ führt $\frac{s+2}{2}$ Quadrupel an! η führt $\frac{s+2}{2} - 1$ Quadrupel an!

Insgesamt: $2 \cdot \left(\frac{s+2}{2}\right) - 1 = s + 1$ Quadrupel

Noch zu zeigen: Jedes Quadrupel erzeugt Schnitt!

Situation: u im Innern!

- u sieht x, z, y, w ■
- Verb. $D_u^x, D_u^z, D_u^y, D_u^w$ schnittfrei mit $C_x^z, C_z^y, C_y^w, C_w^x$
- Annahme: D_x^y und D_z^w schnittfrei \Rightarrow alle schnittfrei!! ■
- Entspricht: $K5$ in der Ebene schnittfrei realisiert! Widerspruch!! ■



Konklusion: **Lem. 2.20**

- n Bögen, je s Schnitte: **Zeige: DSS mit $(4n, s + 2)$**
- **Annahme: DSS mit mind. $(4n, s + 3)$**
- $(s + 3)$ Wechsel auf ζ und η , **sukzessive**
- Bei jedem Quadrupel $(\zeta_i, \eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1})$ (oder $(\eta_i, \zeta_{i+1}, \eta_{i+1}, \zeta_{i+2})$):
Schnitt zwischen (ζ_i, ζ_{i+1}) und (η_i, η_{i+1})
- $s + 1$ Quadrupel $\Rightarrow s + 1$ Schnitte, **Widerspruch!!**
- **DSS mit $(4n, s + 2)$**

Zurück zur Aufgabe: Konfigurationsraum

- n Bögen ■
- Je zwei schneiden sich s mal ■
- X-monoton, ■ eventuell erzeugen ■
- Startpunkt x ■
- Komplexität der Zelle Z_x : ■ $\lambda_{s+2}(4n)$ ■
- Divide and Conquer Ansatz sinnvoll ■

Alg. 2.4: Zelle Z_x !

Gegeben: Punkt x , n X -monotone Bögen.■

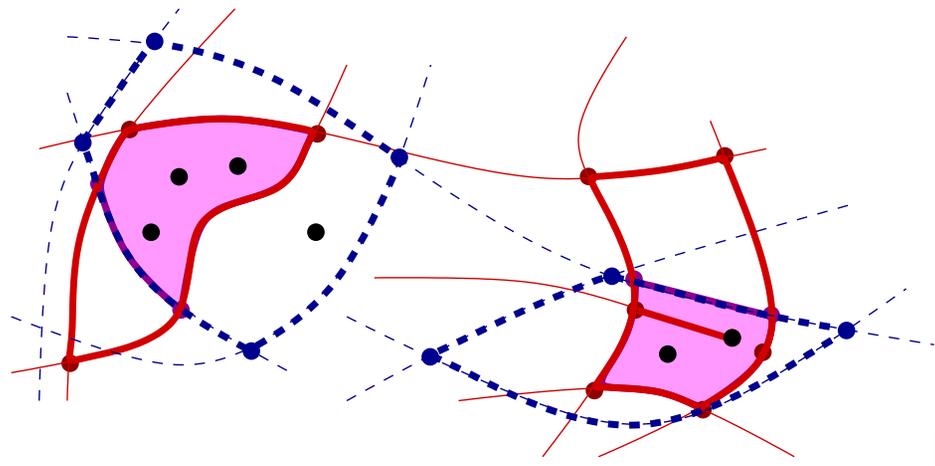
Gesucht: Zelle Z_x im Arrangement der Bögen, die x enthält.■

- Zerlege Menge der Bögen in gleichgroße Teilmengen R und B .■
- Berechne rek. im Arrangement $A(R)$ Zelle $Z(R)_x$, die x enthält.■
- Berechne rek. im Arrangement $A(B)$ Zelle $Z(B)_x$, die x enthält.■
- Berechne Zusammenhangskomponente Z_x von $Z(R)_x \cap Z(B)_x$, die x enthält und berichte diese! **RED-BLUE Merge**■

Zuerst **RED-BLUE Merge** betrachten, dann zurück!■

Allgemeiner RED-BLUE Merge

- Rotes Arrangement R mit Zellen R_1, \dots, R_{m_R} , r Ecken.■
- Blaues Arrangement B mit Zellen B_1, \dots, B_{m_B} , b Ecken.■
- Punktmenge p_i $i = 1, \dots, k$ ■
- Schnittzellen $Z_j = R_{\mu_j} \cap B_{\nu_j}$, $j = 1, \dots, l$, die mind. ein p_i enthalten■



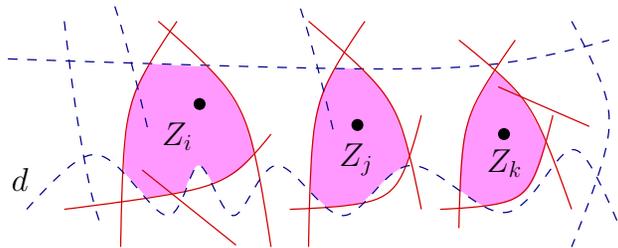
Komplexität der Schnittzellen: **Lem. 2.21**

Kombinationslemma: Guibas, Sharir, Sifrony 1989 (DSS *Bibel*)

Komplexität der Zellen Z_1, \dots, Z_ℓ , $\ell \leq k$:

$$|Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_\ell| \in O(r + b + k)$$

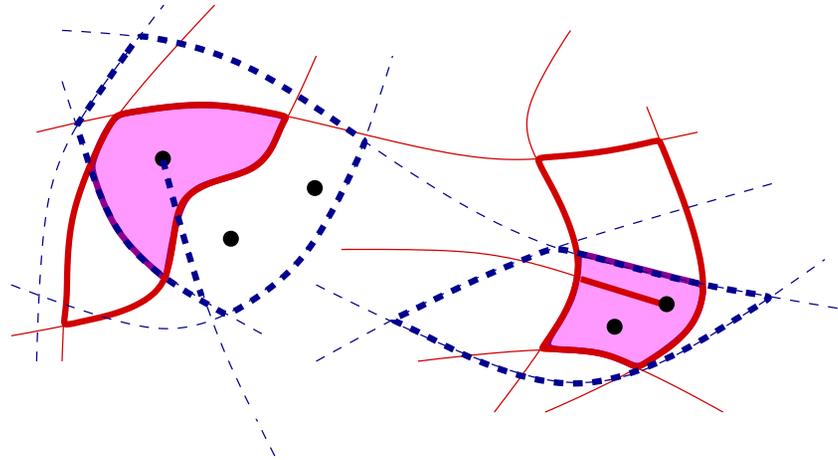
Nicht trivial:



Zur Analyse der Berechnung verwenden!!!

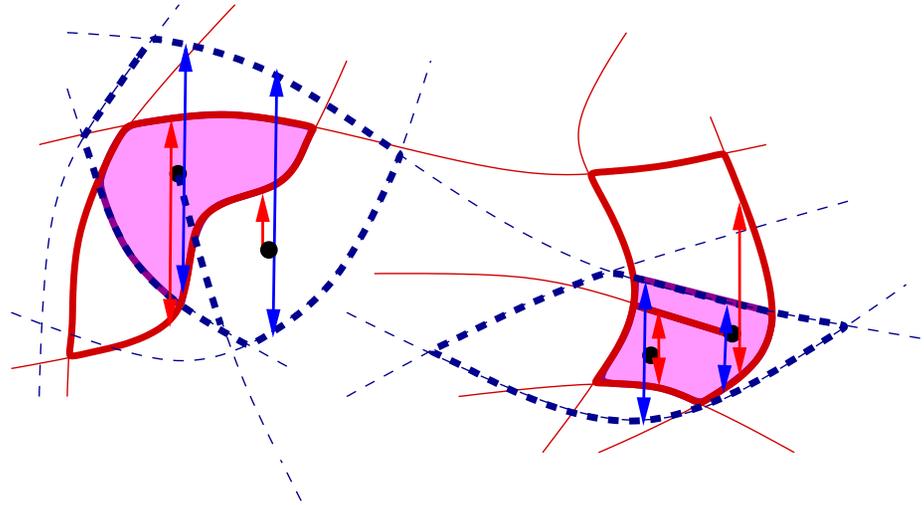
Berechnung: Th. 2.22

- Rotes Arrangement R (r), Blaues Arrangement B (b),
- Punktmenge P (k), Schnittzellen Z_i ■
- $|Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_\ell|$ in $O((r + b + k) \log(r + b + k))$ berechnen!■
- Sweep Algorithmus■
- P erweitern: *Innere* Endknoten von R und B : Wichtig!!■
- Q : P und *innere* Endknoten■



Alg. 2.5: Preprocessing!

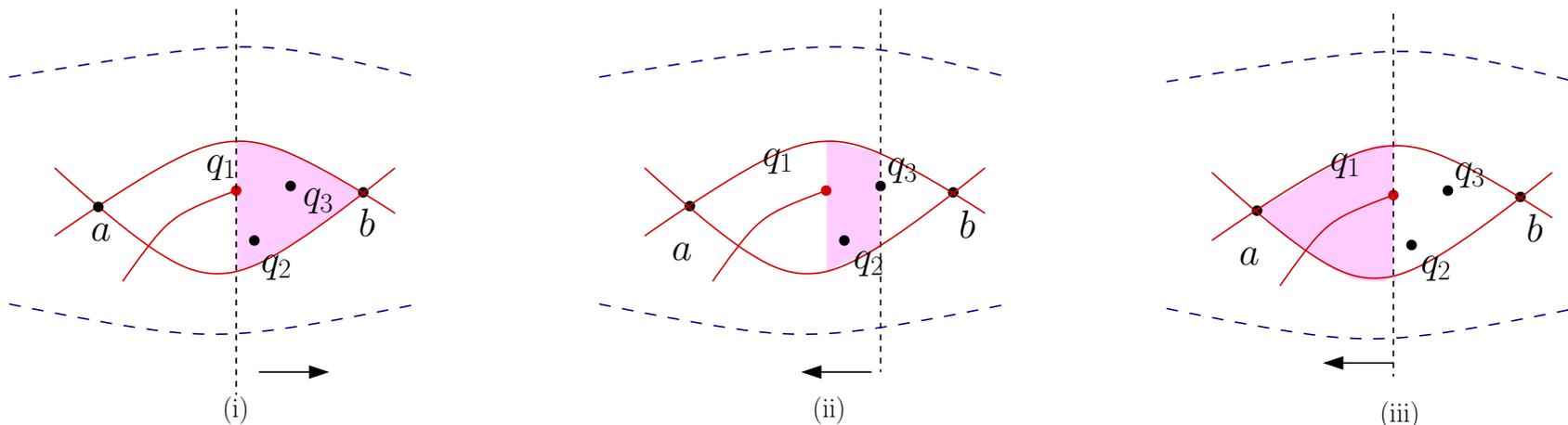
Für alle $q \in Q$ darüber/darunter-liegende Kante in R und B ■



Durch Sweep in jedem Arrangement: Übung
 $O((r + b + k) \log(r + b + k))$ ■

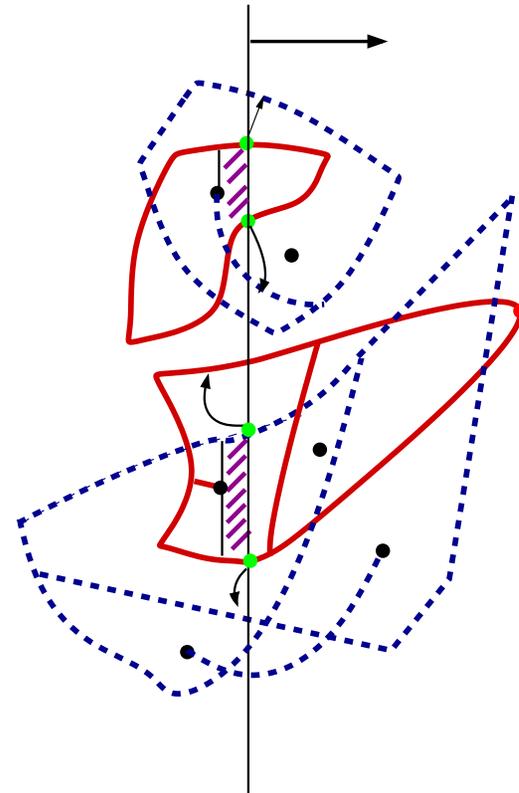
Alg. 2.5: Sweep in zwei Richtungen!

- i) Teile der Ergebniszellen: Rechts vom am weitesten links liegenden $q \in Q$ beginnen
 - ii) Teile der Ergebniszellen: Links vom am weitesten rechts liegenden $q \in Q$ beginnen
 - iii) Nochmals Aufteilen in Teilzellen
- Dann Vereinigung!



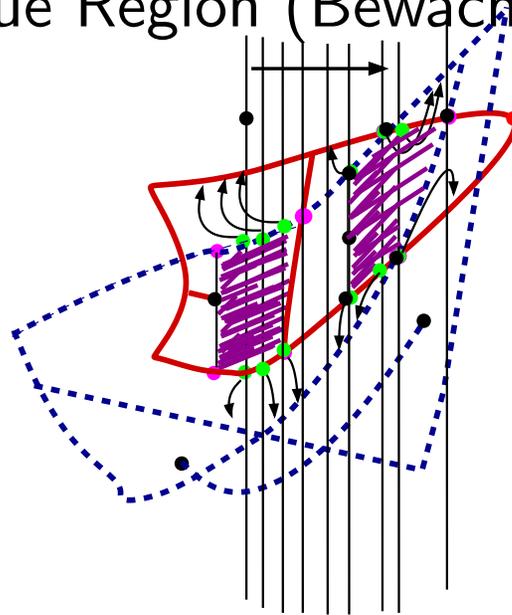
Alg. 2.6: Sweep (eine Richtung!)

- ES: nach X -Koord. sort.
Punkte aus Q + zusätzl. Ecken
- von R und B .■
- SSS: Zu jedem Zeitpunkt:■
 - sortierte Folge der Schnittzellen entlang der Sweepline■
 - Schnittzellen haben Zeiger auf O/U Kanten■
 - Scout läuft auf Schnittkante und bewacht mitentscheidene Kanten!!■



Alg. 2.6: Ereignisse!!

- Bewachte Kante wechselt! (Schnitte: Mit Bewacher?)■
- Randkante wechselt! (Schnitte: Mit Bewacher/Mit Randkante?)■
- Red/Blue Schnittpunkt: Region Ende oder Wechsel
Rand/Bewachte Kante■
- Endpunkt aus Q : Neue Region (Bewachung/Schnitte)!!■



Beispiel (Tafel): Alg. 2.6: Ereignisse!!

$$n = r + b + k$$

- 1. Rot/Roter Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
 - 2. Blau/Blauer Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
 - 3. Rot/Blauer Schnittpunkt: Wechsel! Schnitte! $O(1)$
 - 4. Neuer Punkt: Regionstart $O(1)$ Preprocessing! Einfügen in SSS: $O(\log n)$; Schnitte! $O(1)$
- Schnitte Blau/Rot berechnen: 1), 2), 3), 4)!
 - A) Nächsten berechnet in $O(1)$
 - B) Einfügen in ES: $O(\log n)$: Begründung! ■

Analyse: Red-Blue Merge **Th. 2.22**

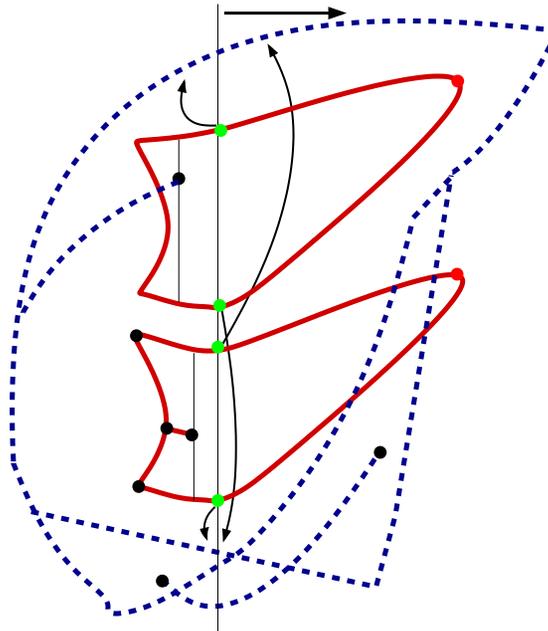
$$n = r + b + k$$

- Nie mehr als $O(r + b + k)$ Punkte in ES
- Nie mehr als $O(r + b + k)$ Regionen in SSS
- Einfügen in ES: $O(\log(r + b + k))$
- Einfügen in SSS: $O(\log(r + b + k))$
- Nicht mehr als $O(r + b + k)$ Ereignisse:
 - Rot/Rot, Blau/Blau: r und b
 - Rot/Blau, neu aber in $O(r + b + k)$
 - Neue Punkte: $\max. k + r + b$

Insgesamt: $O(n \log n)$

Analyse: Red-Blue Merge Th. 2.22

- Problem (Besonderheiten): ■
- Eine bewachte Kante gehört zu vielen Zellen!■
- Nicht für alle Zellen prüfen!!■
- Abhilfe: In Listen zusammenfassen!■
- Nur mit oberen/unteren den Schnitt testen!■



Initialisierung Red-Blue Merge **Th. 2.22**

- Weitere Besonderheiten■
- Initialisierung■
- Zu Beginn nur zwei einzelne Bögen■
- Natürliche Begrenzung (häufig)■
- Unendliche Zellen■
- Beispiel: Tafel!■

Zellenberechnung: Th. 2.23

n X -monotone Kurvenstücke von denen sich zwei nur s mal schneiden, x gegeben. Zelle Z_x kann in Zeit $O(\lambda_{s+2}(n)) \log^2 n$ berechnet werden.■

Fahrplan!!

- Divide and Conquer!!
- Teile Segmente in zwei gleichgroße Mengen Z_1, Z_2
- Berechne Z_{1x} und Z_{2x}
- Merge zu $\{Z_1 \cup Z_2\}_x$
- Spezieller Merge wegen Schnitt mit x
- RED BLUE Merge
- Merge: Komplexität des Ergebnisses

Beweis: Th. 2.22

Divide and Conquer

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.)} + C \times \lambda_{s+2}(n) \log(\lambda_{s+2}(n)) \text{ (R/B-Merge)} \\ &\leq 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + C\lambda_{s+2}\left(\frac{n}{2}\right) \log\frac{n}{2}\right) + C \times \lambda_{s+2}(n) \log n \\ &\vdots \\ &\leq (n)(T(1) + C) + C \sum_{i=0}^{\log n} \left(\lambda_{s+2}(n) \log \frac{n}{2^i}\right) \\ &\in O(\lambda_{s+2}(n) \log^2 n) \end{aligned}$$

Anwendungen: Kap. 2.2.2

- Polygonaler Roboter R mit $|R| = m$
- Polygonale Szene n Ecken
- Reine Translationsbewegung
- Startposition s , Endposition t
- Kollisionsfreie Bahn von s nach t

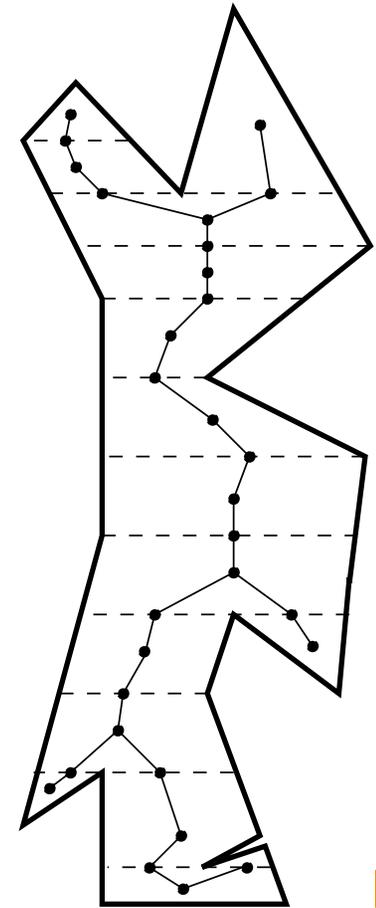
Alg. 2.7

Preprocessing: ■

- ● Arrang. $2mn$ Linienseg.(Ecke/Kante)■
- Ber. Zelle Z , die s enthält:
■ Komplexität $O(\lambda_{(1+2)}(mn))$, ■ Laufzeit $O(\lambda_{(1+2)}(mn) \log^2(mn))$ ■
- Trapezzerlegung, ■ Zusammenhangsgraph:
■ Seidel $O(\lambda_{(1+2)}(mn) \log^*(mn))$ (Sweep)■

Query: gegebenes t :

- Trapez, das t enthält: $O(\log(mn))$ ■
- Pfad s nach t im Zusammenhangsgraph:
 $O(\lambda_{(1+2)}(mn))$ ■



Theorem 2.24

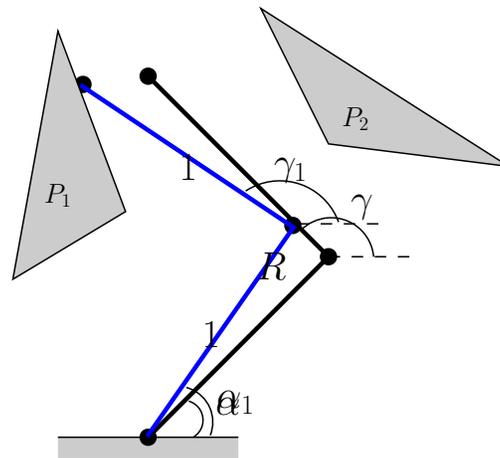
Translation von R polygonaler Roboter mit m Ecken, in einer Umgebung mit polygonalen Hindernissen P_i mit insgesamt n Ecken. ■

Gegeben seien Start- und Zielposition s, t . ■

Dann kann in Zeit $O(mn \alpha(mn) \log^2(mn))$ eine kollisionsfreie Translation von s nach t bestimmt werden oder festgestellt werden, dass keine solche existiert. ■

Anwendungen: Kap. 2.2.3

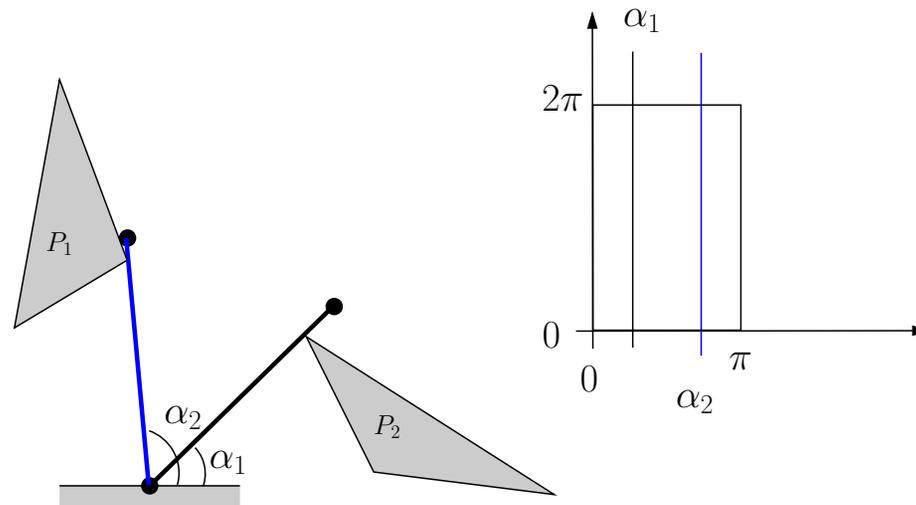
- Allgemeinheit der Konstruktion ausnutzen
- n Bögen begrenzen Konfigurationsraum
- Beispiel: Podest, Roboterarm mit zwei Gelenken
- Zwei Freiheitsgrad: Tupel des Konfigurationsraumes!!
- Hindernisse, normierte Armlänge



Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 1.

Einschränkung unterer Bogen: α_1, α_2

Zwei Kanten im Konfigurationsraum!!

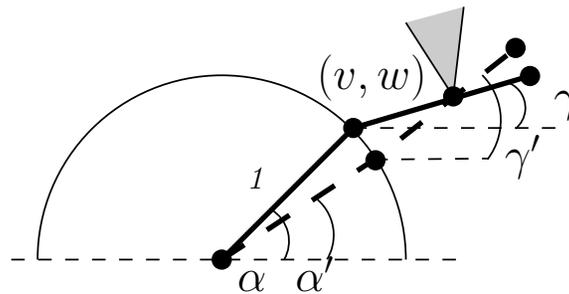


Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 2.

Kontakt: Hindernisecke mit oberem Arm! Entlangsschieben! ■

■ Kurve im Konfigurationsraum!! ■

Geschickte Parametrisierung wählen! (Tafel) ■

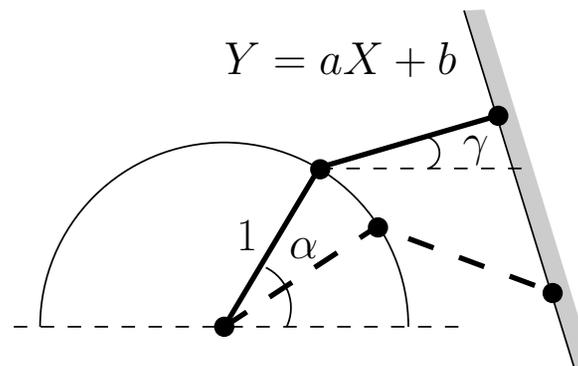


Wodurch wird eine Zelle begrenzt? 3.

Kontakt: Roboterecke mit Hinderniskante! Entlangsschieben! ■

■ Kurve im Konfigurationsraum!! ■

Geschickte Parametrisierung wählen! (Tafel) ■



Algebraische Kurven!

1. 2 Geraden $x = \cos(\alpha_i) \quad i = 1, 2$ ■
2. n Kurven: (v, w) fest! $\{(x, y) | (2wy^2)^2(1 - x^2) = (v^2 - 2xv + x^2 - y^2v^2 + 2xvy^2 - w^2y^2 - y^2)^2\}$ ■
3. n Kurven: (a, b) fest!
 $\{(x, y) | ((a(x + y) + b)^2 - 2 + x^2 + y^2)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)\}$ ■

Multivariate Polynome vom Grad ≤ 6 !

Theorie: ■ Je zwei maximal 6^2 Schnitte! ■ Numerisch berechnen! ■

Th. 2.22 anwenden: Bahnplanung in $O(\lambda_{(36+2)}(n) \log^2 n)$!! ■