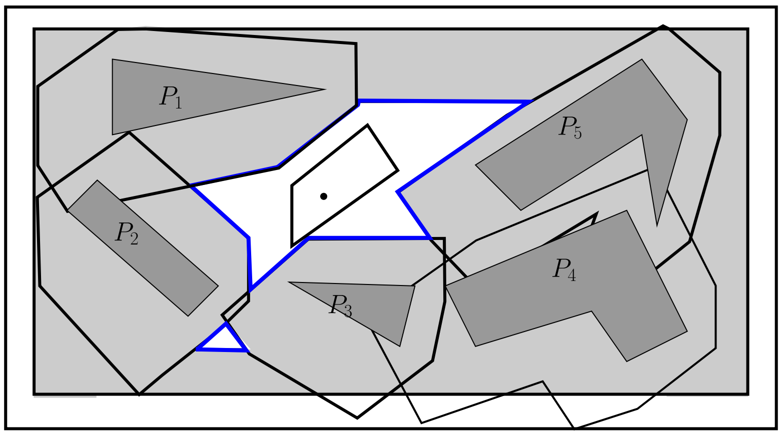
Offline Bewegungsplanung: Reine Translation

Elmar Langetepe
University of Bonn

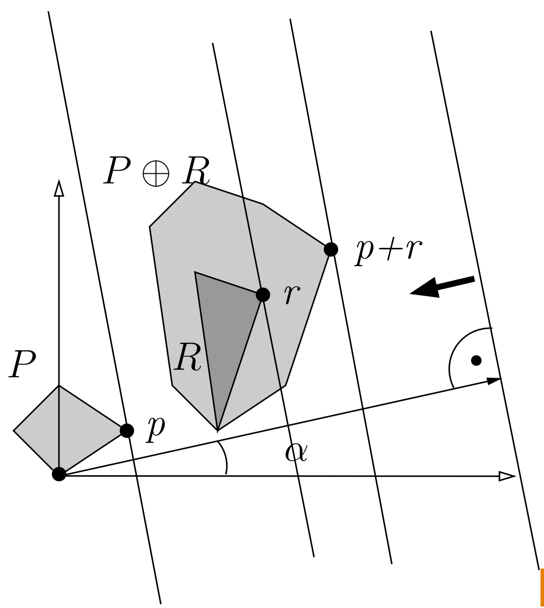
Folgerung!

- $C_{\text{verb}} := \left\{ (x,y) \in^2 |R(x,y) \cap \bigcup \overset{\circ}{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- $CP_i := \{ (x,y) \in^2 |R(x,y) \cap P_i \neq \emptyset \}$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^{k} CP_i \right)$
- $\partial \left(\bigcup_{i=1}^{k} (P_i \oplus (-R(0,0))) \right)$
- Alle Summen $P_i \oplus (-R(0,0))$ bilden
- Vereinigen!



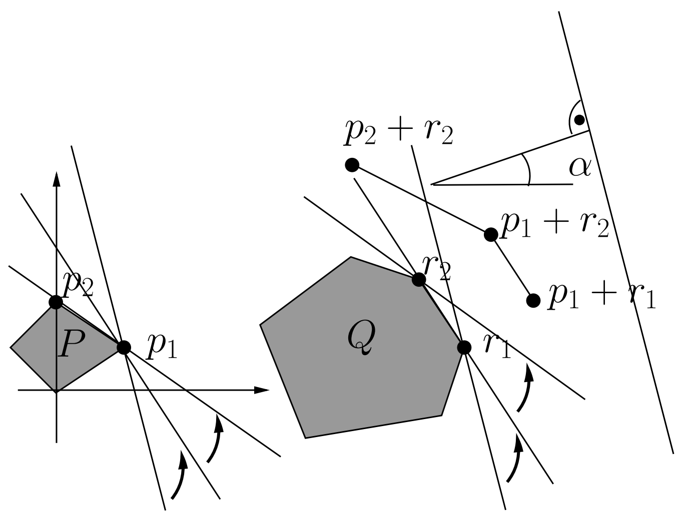
Eigenschaften von Minkowski-Summen

- P, Q konvexe Polygone
- Bem. 2.8 a) Extremalpunkte bezüglich α!
- Extremalpunkte von $P \oplus Q$ aus Summe von Extremalpunkten



Berechnung und Komplexität Lem. 2.9

- P, Q konvexe Polygone, $|P| = n$, $|Q| = m$
- $P \oplus Q$ konvex (Tafel), $O(m+n)$ Kanten
- Konstruktion in $O(m+n)$: Nutze Extremalpunkte



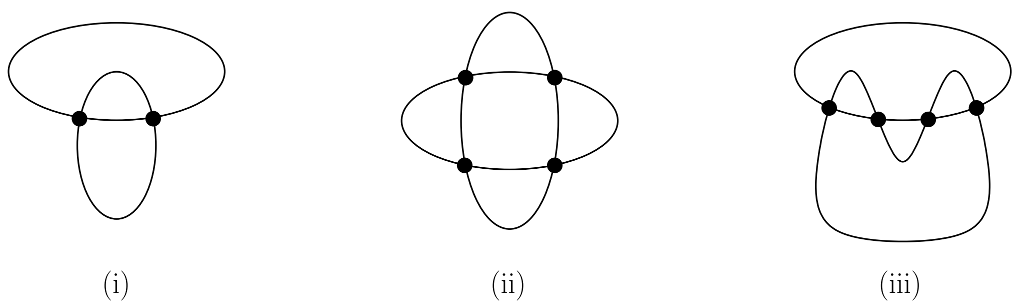
Nicht mehr als $O(n+m)$ Kanten enstehen

Idee: Divide and Conquer

- Konvexer Roboter
- Trianguliere alle Polygone: $T_1, \ldots, T_l$
- Vereinigung aller CT_i
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität des Ergebnisses

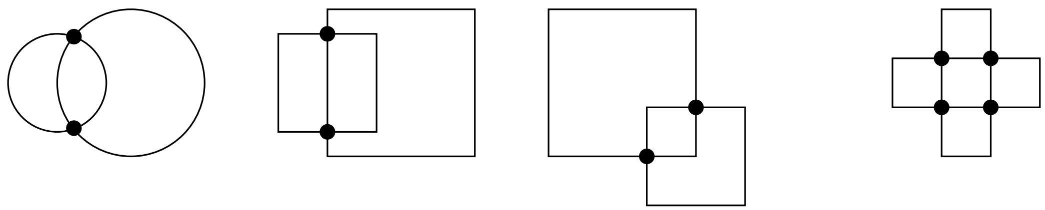
Umweg: Pseudokreise Def. 2.10

- Jordan-Kurve: geschlossene Kurve, teilt Ebene in zwei Gebiete
- Paar von Pseudokreisen:
  - Durch Jordankurven berandete Mengen A, B
  - Ränder haben entweder höchsten zwei Kreuzungen
  - Oder Ränder haben höchstens einen Berührpunkt
- Verhalten sich wie Kreise



Konvexe Pseudokreise: Lem. 2.11

- Konvexe Mengen A, B
- A, B Paar von Pseudokreisen $\Leftrightarrow$ $A \backslash B$ und $B \backslash A$ (weg)-zusammenhängend
- Konvexität ist wichtig ($\Leftarrow$)



(i) (ii) (iii) (iv)

Fahrplan!

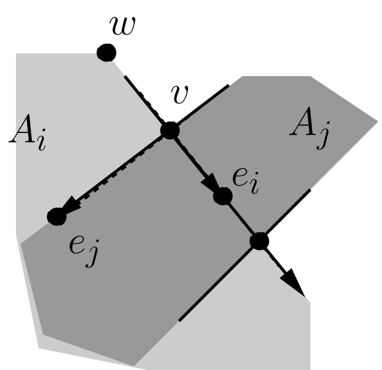
- Komplexität: Vereinigung einer Menge von Pseudokreisen
- Trianguliere alle Polygone: $T_1, \ldots, T_l$
- Konvexer Roboter
- CT_i, CT_j sind Pseudokreise
- Divide and Conquer
- Mergen!!!
- Komplexität der Vereinigung

Familie polygonaler Pseudokreise Th. 2.13

- $A_1, A_2, \ldots, A_k$ paarweise Paar v. Pseudokreisen
- polygonal, mit insgesamt n Ecken
- $\partial \bigcup A_i$ hat Komplexität $O(n)$
- Zählargument, klassisch

Beweis: Th. 2.13

- Knoten w von A_i auf $\partial \bigcup A_i$: Insgesamt: $O(n)$ viele
- Schnitt v von A_j, A_i auf $\partial \bigcup A_i$ zuordnen, verfolge Kante e_i:
  - Endet in A_j (innerhalb): Zähle Endpunkt von e_i
  - Geht durch A_j durch: Zähle Endpunkt von e_j (innerhalb)
  - Nur zweimal belastbar, nach Aussen verfolgen



Spezielle Pseudokreise Lem. 2.12

- P_1, P_2 konvex, $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Beweis später, Benutzung:

- Triangulation der Szene: Dreiecke $T_1, \ldots, T_l$
- $CT_i = T_i \oplus -R$ Familie von Pseudokreisen
- Komplexität für Divide and Conquer

Komplexität Minkowski-Summe Lem. 2.15

i) P_1, P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ konvex, Komplexität $\Theta(m + n)$.

ii) Nur P_2 konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(mn)$.

iii) Kein P_i konvex, $P_1 \oplus P_2$ Komplexität $\Theta(m^2n^2)$.

Müssen nicht disjunkt sein!!!

Beweis!! i) bereits gezeigt $(\Omega(n + m))$

ii) Nur P_2 konvex: $O(mn)$

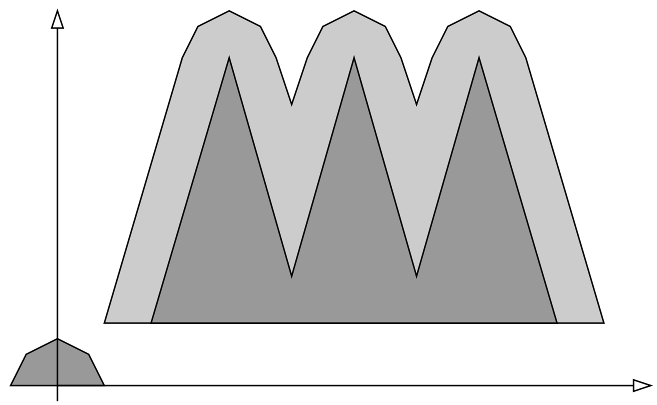
- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$): $T_1, \ldots, T_{n-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, Inneres disjunkt
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} T_i \right) \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \underbrace{(T_i \oplus P_2)}_{O(m) \text{ Kanten}} .$$

- Lemma 2.12: Familie v. Pseudokreisen, insg. $O(mn)$ Kanten
- Theorem 2.13: Vereinigung hat Komplexität $O(mn)$

ii) Nur P_2 konvex: $\Omega(mn)$

Untere Schranken, konstruktiv



iii) Kein P_i konvex: $O((mn)^2)$

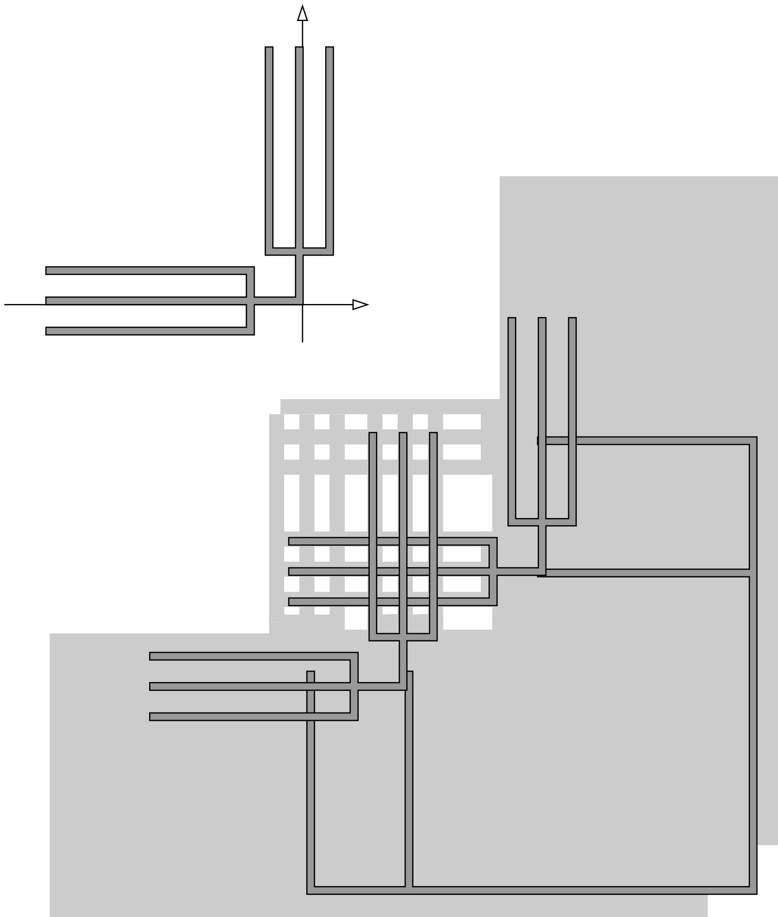
- Trianguliere P_1 ($|P_1| = n$) und P_2 ($|P_2| = m$): $T_1, \ldots, T_{n-2}$ und $T'_1, \ldots, T'_{m-2}$
- $P_1 = \bigcup_{i=1}^{n-2} T_i$, $P_2 = \bigcup_{i=1}^{m-2} T'_i$
- Distributivität ausnutzen:

$$P_1 \oplus P_2 = \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{m-2} \underbrace{T_i \oplus T'_j}_{O(1)\ \text{Kanten}} .$$

- Gesamtzahl der Kanten: $O(nm)$, jede mit jeder: Paare $O((mn)^2)$
- Pseudokreise?

iii) Kein P_i konvex: $\Omega((mn)^2)$

Untere Schranken, konstruktiv

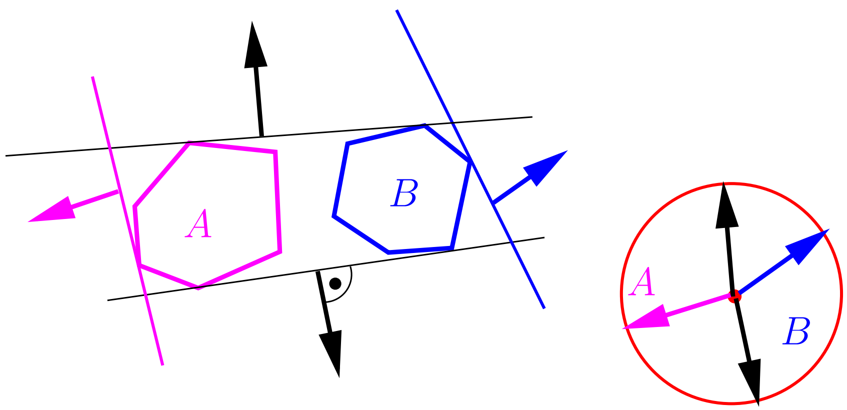


Spezielle Pseudokreise Lem. 2.12

- P_1, P_2 konvex, $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- $A = P_1 \oplus R$ und $B = P_2 \oplus R$
- Paar konvexer Pseudokreise

Extremalpunkte $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$

- Bem. 2.8 b)/Skript: Abb. 2.9
- Extremalpunkte $P_1 \cup P_2$ bezüglich aller Richtungen
- Wechseln sich zweimal ab, disjunkt!!



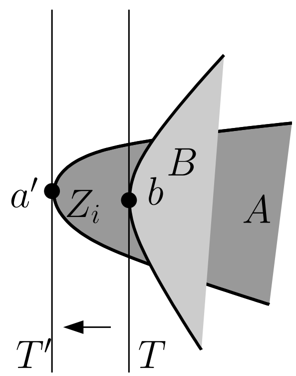
$A = P_1 \oplus R$ **und** $B = P_2 \oplus R$ **konvexe Pseudokreise**

- P_1, P_2 konvex, $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$, R konvex
- Konvexität: klar!
- Symmetrie: Zeige $A \setminus B$ ist zusammenhängend
- Zusammenhangskomponenten Z_i von $A \setminus B$: Es gibt nur eine!
- 1) Jedes Z_i hat Punkte auf Rand von $ch(A \cup B)$
- Zwei Fälle:
  - i) $Z_i = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$, es ex. $a \in A$ mit $a \in ch(A \cup B)$, denn A, B sind konvex
  - ii) $Z_i \subset A \Rightarrow \exists b \in B$ mit $b \in \partial Z_i$

$A = P_1 \oplus R$ **und** $B = P_2 \oplus R$ **konvexe Pseudokreise**

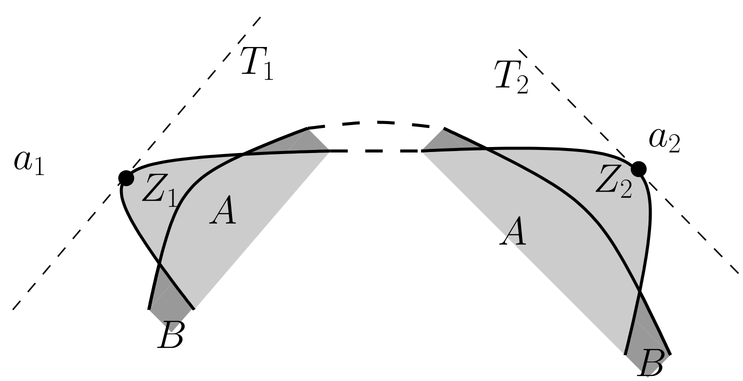
Fall ii) $Z_i \subset A$ z.z.: $\exists a \in Z_i$ und $a \in ch(A \cup B)$

- $\exists b \in B$ mit $b \in \partial Z_i$
- Tangente T durch b an B, konvex
- B vollst. auf einer Seite, Punkte von A auf der anderen!!
- Verschiebe T parallel, bis Rand von A erreicht
- $a' \in Z_i$ und $a' \in ch(A \cup B)$

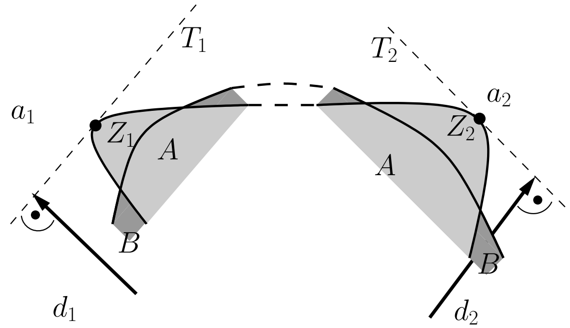


$A = P_1 \oplus R$ **und** $B = P_2 \oplus R$ **konvexe Pseudokreise**

- 2) Zeige $A \backslash B$ ist zusammenhängend
- Gerade gezeigt: 1) Jedes Z_i von $A \backslash B$ hat Rand von $ch(A \cup B)$
- Annahme: Unabhängige Z_1 und Z_2 existieren
- $a_1 \in Z_1$ und $a_2 \in Z_2$, $a_1, a_2 \in ch(A \cup B)$
- Situation!!



$A \backslash B$ ist zusammenhängend



- $A = P_1 \oplus R$ extremer als $B = P_2 \oplus R$ in d_1 und d_2
- Bem. 2.8 a): P_1 extremer als P_2 in d_1 und d_2
- Bem. 2.8 b): P_1 extr. als P_2 zw. allen d_1 und d_2 (eine Richtung!)
- Bem. 2.8 a): $A = P_1 \oplus R$ extremer als $B = P_2 \oplus R$ zwischen allen d_1 und d_2 (eine Richtung!)
- Zwischen allen d_1 und d_2 (eine Richtung!) bleibt Z_i bestehen!!
- Es gibt nur eine Komponente!! $A \backslash B$ ist zusammenhängend!!

Folgerungen!! Theorem 2.16

- Konvexer Roboter R mit $|R| = m$, polygonale Szene, n Kanten
- Komplexität von C_{verb} in $O(mn)$, Beweis!!
- Triangulaere alle P_j, $T_1, T_2, \ldots T_l$ mit $O(n)$ Kanten
- $CT_i = T_i \oplus -R(0,0)$ Familie von Pseudokreisen Lem. 2.12, $O((m+3)n)$ Kanten Lem. 2.15

$$C_{\text{verb}} = \underbrace{\bigcup_i T_i \oplus -R(0,0)}_{\text{Komplexität } O(mn)}.$$

Benutze Theorem 2.13

Folgerungen!! Theorem 2.16

- Algorithmus 2.2: Berechnung von C_{verb}
  - Unterteile Hindernisse in gleichgroße Teilmengen von Dreiecken CP_1 und CP_2
  - Berechne rek. $C_{\text{verb}}(CP_1)$ und $C_{\text{verb}}(CP_2)$, je $O(mn)$ Kanten
  - Berechne Vereinigung $C_{\text{verb}}(CP_1) \cup C_{\text{verb}}(CP_2)$ in Zeit $O(mn \log(mn))$ mit Sweep (Alg. Geom.)

Laufzeit insgesamt: $O(mn \log^2 mn)$

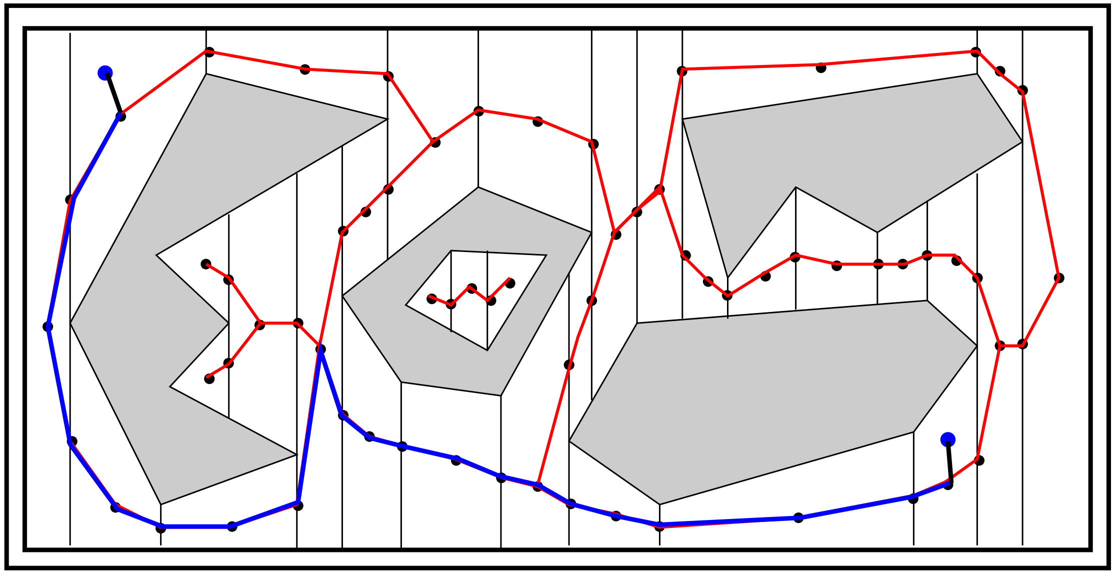
Laufzeitanalyse: Theorem 2.16

Arrangement mit $O(nm)$ Kanten!!

$$
\begin{aligned}
T(m,n) &\leq 2T\left(m,\frac{n}{2}\right) \text{ (Rek.) } + C \times mn \log mn \text{ (Merge)}\\
&\leq 2\left(2T\left(m,\frac{n}{4}\right) + C\frac{mn}{2}\log\frac{mn}{2}\right) + C \times mn \log mn\\
&\vdots \quad \vdots\\
&\leq nT(m,1) + Cmn\sum_{i=0}^{\log n}\log\frac{mn}{2^i}\\
&\in O(mn \log^2 mn)
\end{aligned}
$$

C_{frei} verwenden! Roadmap!!

- Zerlegung in Trapezen (Seidel)
- Benachbarte Trapeze verbinden (Schwerpunkt/Mittelpunkt)
- Zusammenhangsgraph, Roadmap
- Lokalisation s und t und verbinden (BFS)



Algorithmus 2.3: C_{frei} gegeben!

Vorbereitung:

- Trapezzerlegung C_{frei}/Point–Location Struktur, (randomisiert!!) $O(mn \log(mn))$
- Roadmap-Konstruktion: Verbindung adjazenter Trapeze, $O(mn)$

Query:

- Lokalisiere s und t Trapeze, $O(\log(mn))$
- Finde Weg der Trapeze mit BFS, $O(mn)$

Roadmap!! Einfach aber effizient!! Probabilistisch!

Ergebnis: Theorem 2.17

Translationsbewegungen eines konvexen, polygonalen Roboters mit m Ecken in einer Umgebung mit polygonalen Hindernissen mit insgesamt n Ecken können nach $O(mn \log^2(mn))$ (randomisierter) Vorbereitungszeit in Zeit $O(mn)$ geplant werden.