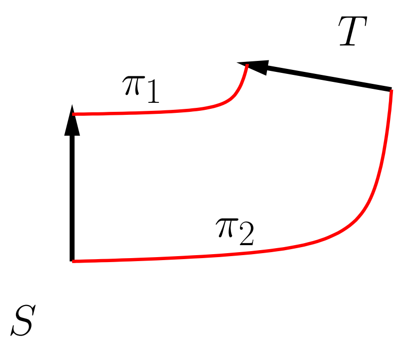
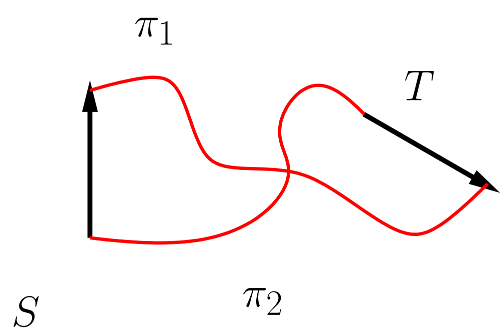
Offline Bewegungsplanung: Objekte bewegen

Elmar Langetepe
University of Bonn

Liniensegmente statt Punkte

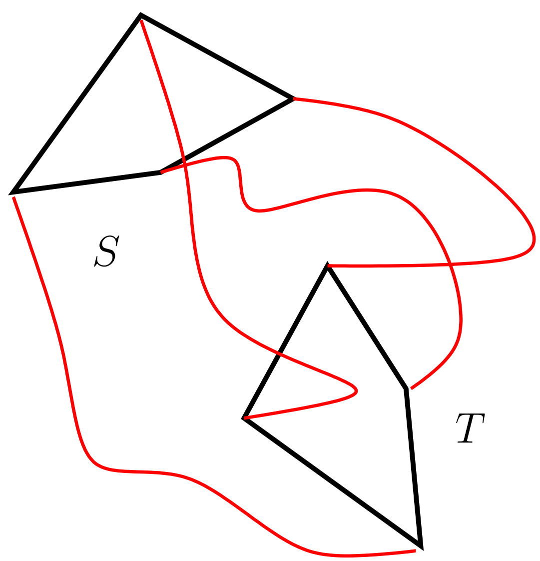
- Liniensegment in der Ebene
- Startlage S und Ziellage T
- Stetige Bewegung von S nach T
- Möglichst kurz!

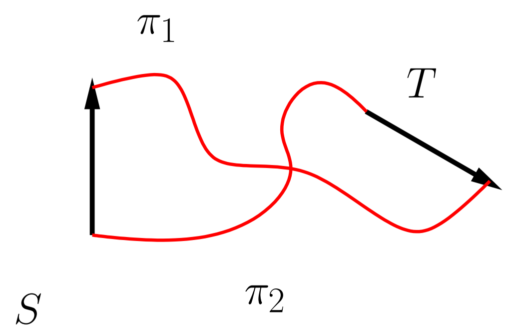




Was ist eine kurze Bewegung?

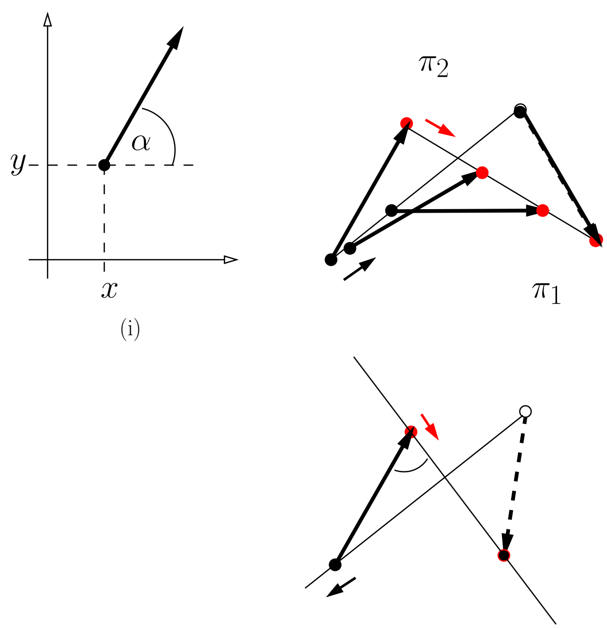
- Bei ausgedehnten Objekten schwierig
- Hier: Weglänge zweier(!) Träger: Summe
- Andere Maße: Mittlerer Weg, Min/Max eines Trägers





Formale Beschreibung!

- Lage des Segmentes durch Tripel (x, y, α)
- Normiert!
- Optimale Bewegungen: Rotation/Translation(Klar!!)
- Translation geht nicht immer



Kombinationen Th. 1.47

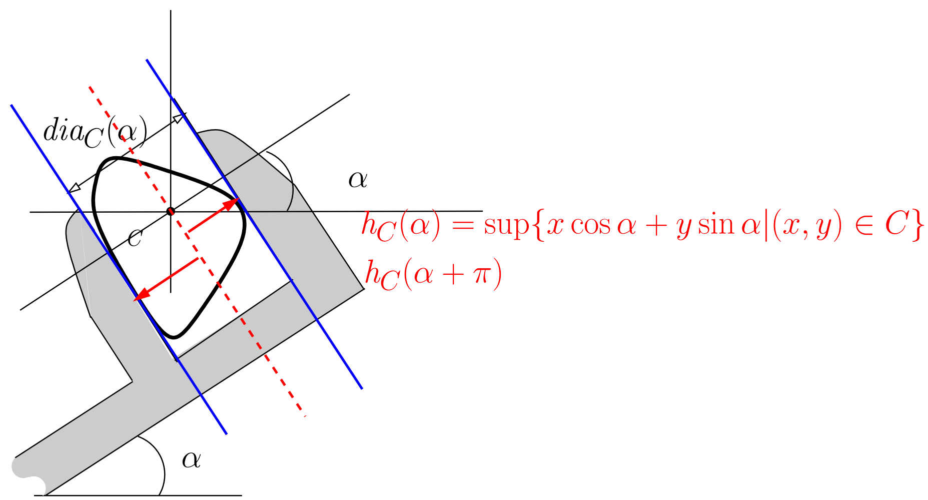
Zwischen je zwei Positionen von Liniensegmenten gibt es eine optimale Bewegung von einem der folgenden Typen:

1. maximal drei Rotationen,
2. maximal zwei Rotationen und eine geradlinige Bewegung,
3. eine Rotation zwischen zwei geradlinigen Bewegungen.

Die Bewegungen lassen sich effizient berechnen.

Rotation? Hilfe: Surface-Area Th. 1.46!

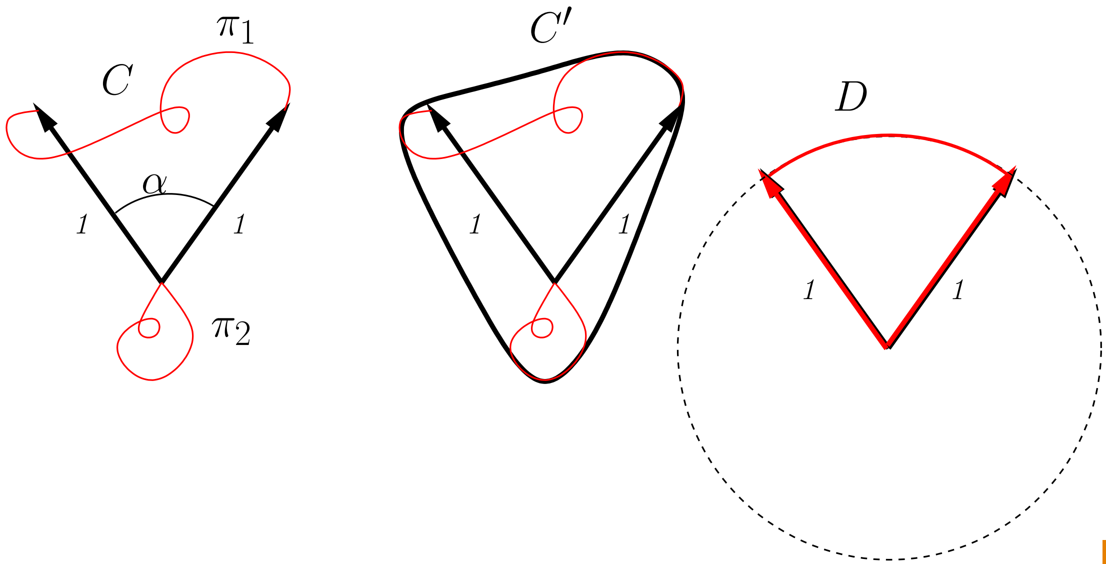
- Geschlossene konvexe Kurve C: Durchm. Funktion: $\mathtt{dia}_\mathtt{C} : [0, 2\pi) \to \mathtt{R}$
- Support Funktion: $\mathtt{h}_\mathtt{C}(\alpha) = \sup\{\mathtt{x}\cos\alpha + \mathtt{y}\sin\alpha | (\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathtt{C}\}$
- X-Koordinate nach Rotation mit α
- Offensichtlich: $\mathtt{dia}_\mathtt{C}(\alpha) = \mathtt{h}_\mathtt{C}(\alpha) + \mathtt{h}_\mathtt{C}(\alpha + \pi)$
- Es gilt: $\mathtt{Length}(\mathtt{C}) = \int_0^\pi \mathtt{dia}_\mathtt{C}(\alpha)\, \mathtt{d}\alpha$



(i)

Beweis: Rotation ist optimal!

- Zwei Kurven C, konvexe Hülle C', D einfache Rotation
- Rotation optimal?

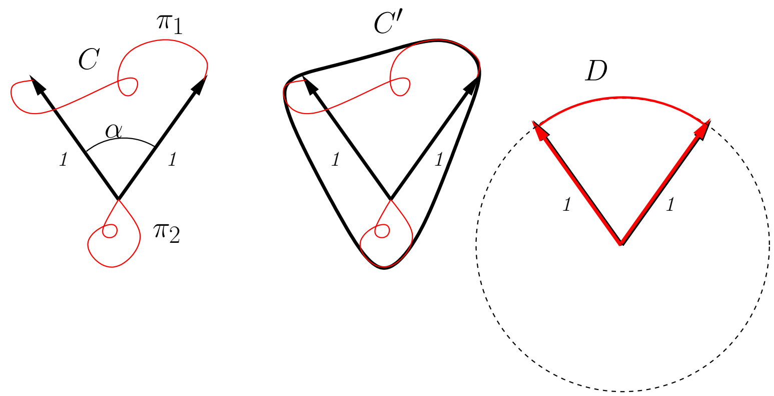


Beweis: Rotation ist optimal!

$$2 + \text{Kosten}(C) \geq \text{Länge}(C') = \int_0^{\pi} \mathtt{dia}_{\mathtt{C'}}(\alpha)\, \mathtt{d}\alpha \quad (\text{Th. 1.46})$$

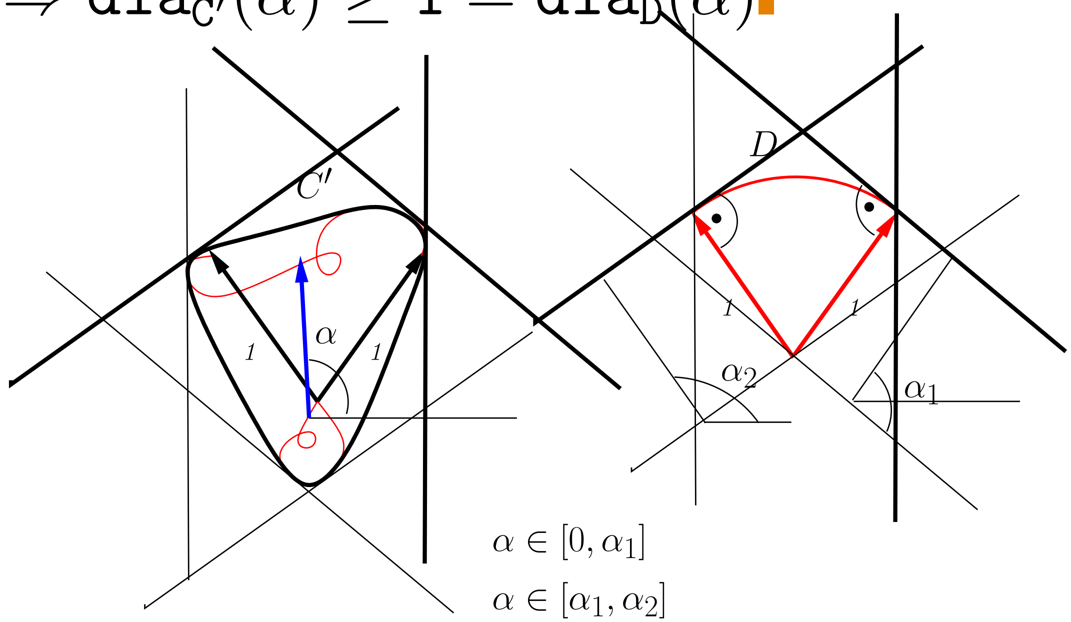
$$\geq \int_0^{\pi} \mathtt{dia}_{\mathtt{D}}(\alpha)\, \mathtt{d}\alpha \quad (\text{wegen } \mathtt{dia}_{\mathtt{C'}}(\alpha) \geq \mathtt{dia}_{\mathtt{D}}(\alpha))$$

$$= \text{Länge}(D) \quad (\text{Th. 1.46}) = 2 + \text{Kosten}(\text{Rotation})$$



Beweis: $\mathtt{dia}_{C'}(\alpha) \geq \mathtt{dia}_{D}(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi]$

- Drei Winkelbereiche!!
- $\alpha \in [0, \alpha_1] \cup [\alpha_2, \pi] \Rightarrow \mathtt{dia}_{C'}(\alpha) \geq \mathtt{dia}_{D}(\alpha)$
- Für $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ ex. stets Platzierung (x, y, α) in C'
- $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] \Rightarrow \mathtt{dia}_{C'}(\alpha) \geq 1 = \mathtt{dia}_{D}(\alpha)$



$\alpha \in [0, \alpha_1]$

$\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$\alpha \in [\alpha_2, \pi]$

Kombinationen Th. 1.47

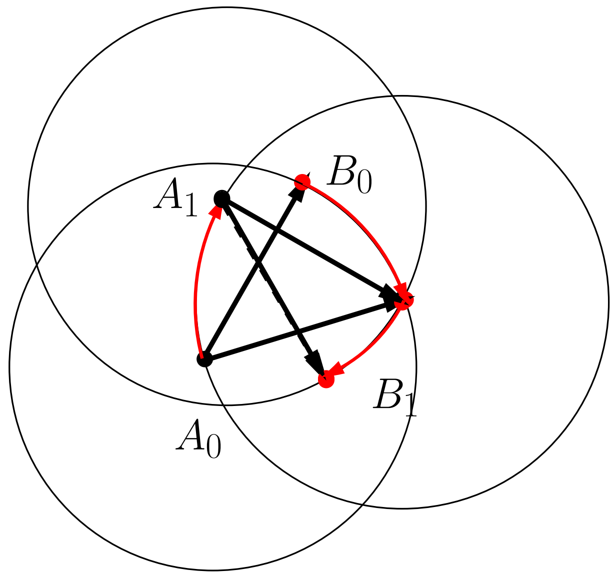
Zwischen je zwei Positionen von Liniensegmenten gibt es eine optimale Bewegung von einem der folgenden Typen:

1. maximal drei Rotationen,
2. maximal zwei Rotationen und eine geradlinige Bewegung,
3. eine Rotation zwischen zwei geradlinigen Bewegungen.

Die Bewegungen lassen sich effizient berechnen.

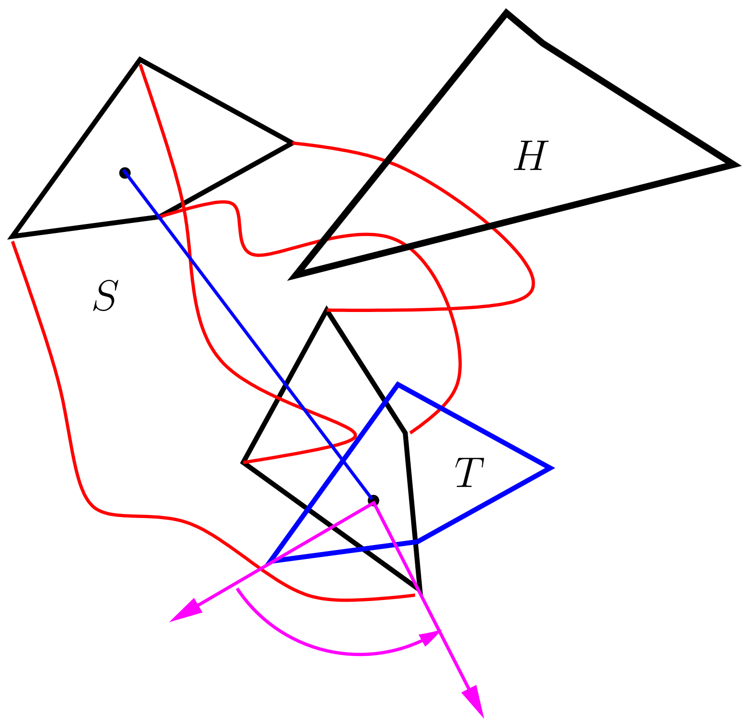
Beispiel: Nahe Placements Th. 1.47

- Abstände $|A_0 - B_1|$ und $|A_1 - B_0|$ kleiner gleich 1
- Drei Rotationen!!

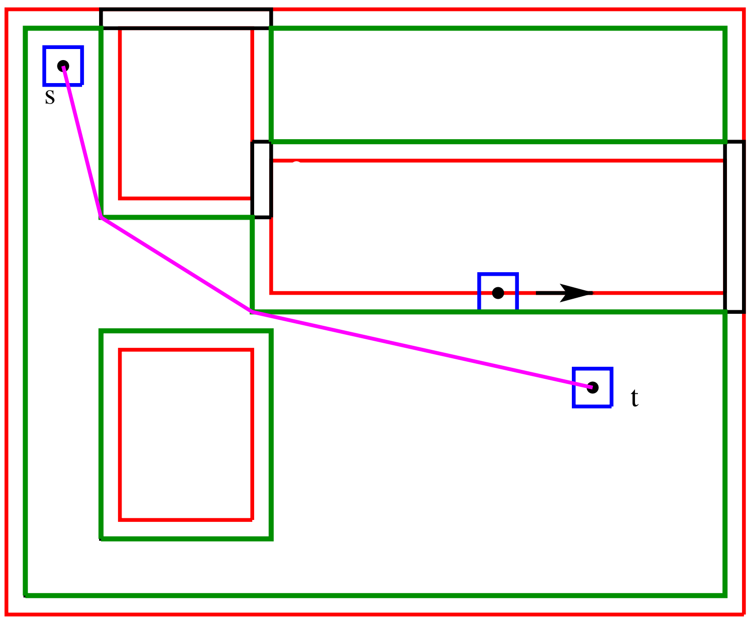


Bewegungen mit ausgedehnten Objekten

- Schwierig zu lösen
- Bewegungen über Referenzpunkt
- Kollisionsfrei??



Kollisionsfreie Bahnen: Startbeispiel!!



Translation: Verschieben Referenzpunkt

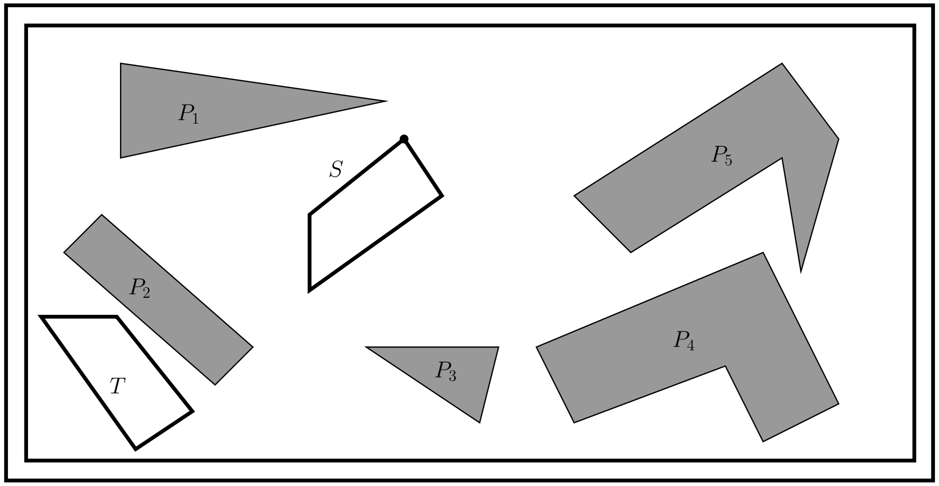
Aufblasen der Hindernisse

Vereinigung Sweep

Kürzester Weg????

Kollisionsfreie Bahnen: Allgemeiner!!

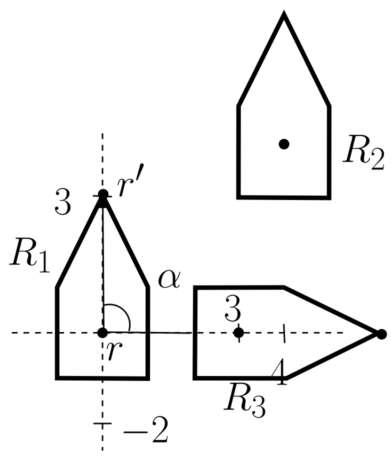
- Existiert Weg von S nach T
- Berechne Weg von S nach T
- Kürzester Weg



Formal: Rotation und Translation

- Platzierung Endpunkte

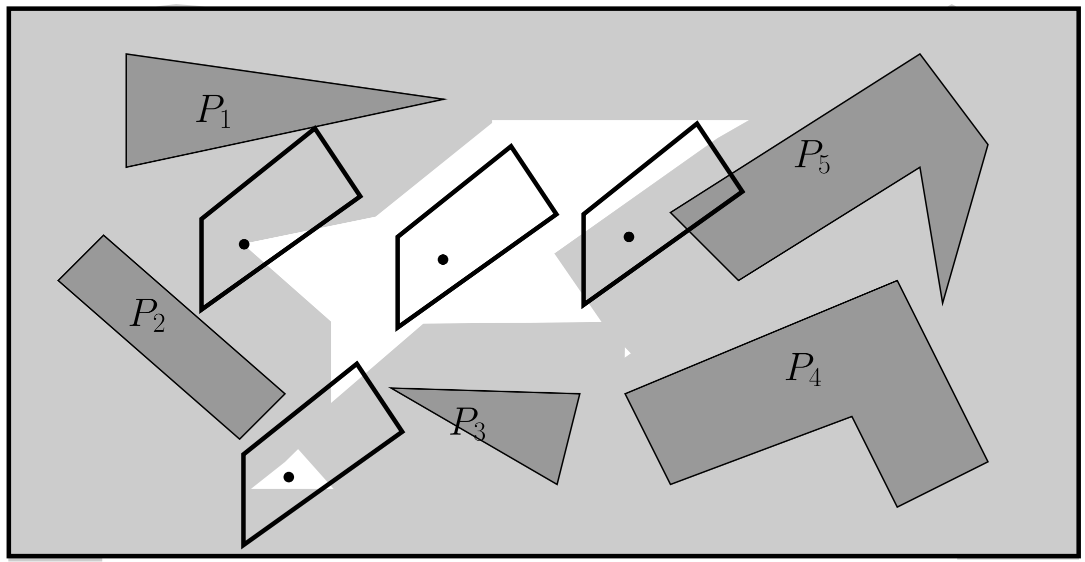
  $R_1 = \{(1,-1),(1,1),(0,3),(-1,1),(-1,-1)\}$
- Verschiebung $R_2 = \{(5,3),(5,5),(4,7),(3,5),(3,3)\}$
- Referenzpunkt r Winkelreferenzpunkt r'
- $R_1 = R(0,0,\pi/2) = \{(1,-1),(1,1),(0,3),(-1,1),(-1,-1)\}$
- $R(x,y,\alpha)$, Translation/Rotation: $R_3 = R(3,0,0)$



Formale Definitionen: Def. 2.1

- Tripel $(x, y, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ Platzierung, 3 DOF (Freiheitsgrade) Referenzpunkt+Winkel!!!
- Konfigurationsraum $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$
- Arbeitsraum: $R(x, y, \alpha)$, $P_1, P_2, \ldots, P_k$
- Verbotene Platzierungen $C_{\text{verb}} := \left\{ c \in C | R(c) \cap \bigcup \mathring{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Freie Platzierungen $C_{\text{frei}} := C \setminus C_{\text{verb}}$
- Halbfreie Platzierungen

Beispiel!!



- Reine Translation
- Bereich der gültigen Platzierungen

Weg-zusammenhängend Def. 2.2

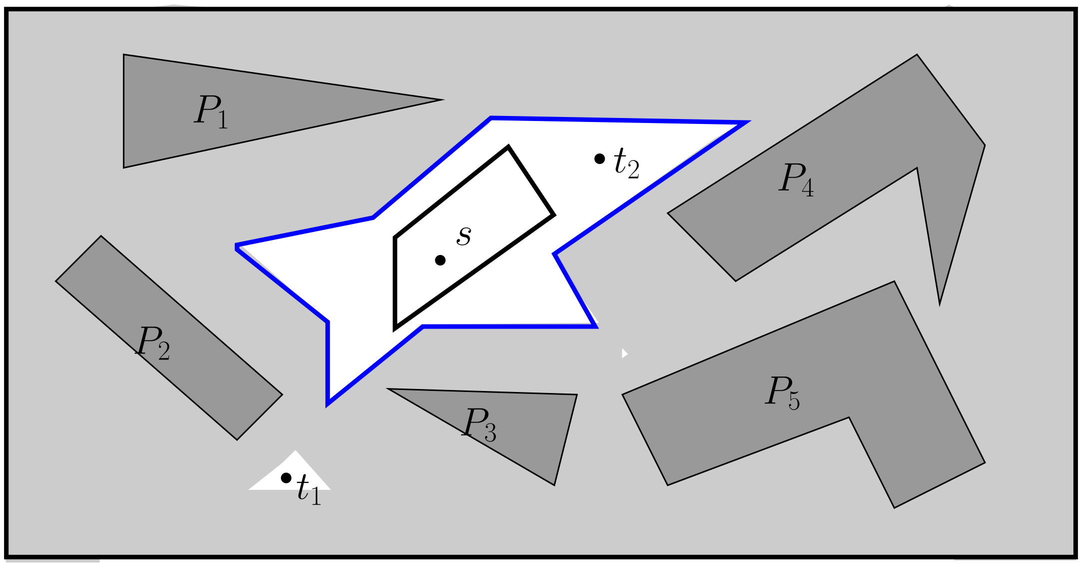
- Menge Z ($Z \subseteq \mathbb{R}^d$)
- Pfad π von a nach b:
  - Stetige Abbildung $\pi : [0,1] \to Z$
  - $\pi(0) = a$, $\pi(1) = b$
- weg-zusammenhängend:
  - $\forall a, b \in Z : \exists$ Pfad π von a nach b in Z.

Zusammenhangskomponenten Lemma 2.3

- Relation auf $A \times A$ ($A \subseteq \mathbb{R}^d$): $a \sim b :\Leftrightarrow \exists$ Pfad $\pi \subset A$ von a nach b in A mit $\pi(0) = a$ und $\pi(1) = b$
- Äquivalenzrelation:
  - Reflexiv: $a \sim a$
  - Symmetrisch: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
  - Transitiv: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- Äquivalenzklassen (Zusammenhangskomponenten)
  - größte weg-zusammenhängende Teilmengen
  - überdecken A disjunkt: $A = \dot{\bigcup} Z_i$

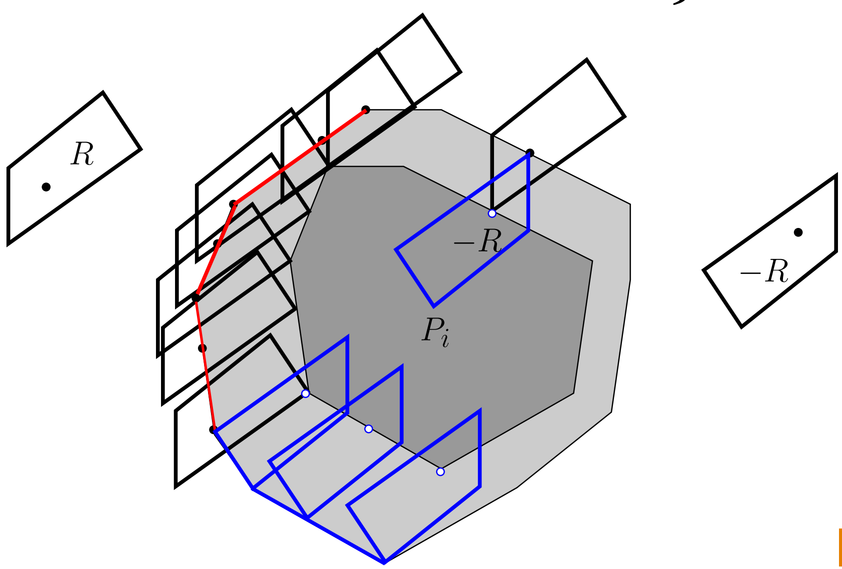
Aufgabe: Beispiel Translation!

- Berechne Zusammenhangskomponente von Z_s, s Startkoordinaten
- Liegt t auch in Z_s?
- Berechne ggf. Weg s nach t in Z_s



Reine Translationsbewegung, konvexe Roboter 2.1.2

- Konvexer Roboter R, Hindernisse $P_1, P_2, \ldots, P_k$
- Berechne $C_{\text{verb}} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | R(x,y) \cap \bigcup \mathring{P}_i \neq \emptyset \right\}$
- Bsp: Für konvexes Polygon P_i
- Konfigurationsraumhindernis
  $CP_i := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | R(x,y) \cap P_i \neq \emptyset \}$



Minkowski-Summe Def. 2.4

- $A, B \subset \mathbb{R}^2$: $A \oplus B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$.
- Bem. 2.4:

  i) kommutativ: $A \oplus B = B \oplus A$

  ii) assoziativ: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

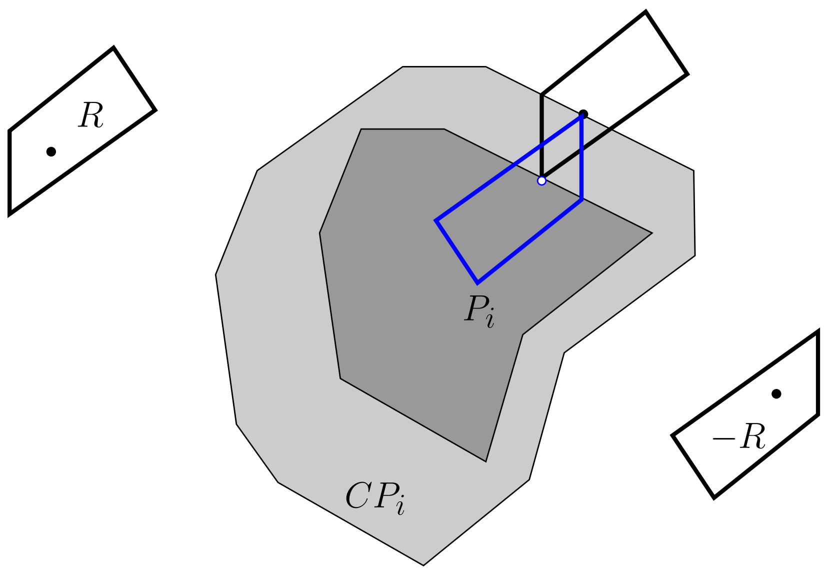
  iii) distributiv bzgl. der Vereinigung:
  $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

Anschaulich!!! `MinkSum.html`

Lemma 2.6

$$CP_i := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 | R(x,y) \cap P_i \neq \emptyset \,\}$$

$$CP_i = P_i \oplus (-R(0,0))$$



Beweis: Tafel!!!