Abgabe: 13.12.16 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 19.12.-23.12.16

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1: DFA (2+2+2+2 Punkte)

Gegeben seien zwei DFAs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ über demselben Alphabet Σ. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben und begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

a) Konstruieren Sie einen DFA, der die Sprache $L(M_1) \cup L(M_2)$ entscheidet.

b) Konstruieren Sie einen DFA, der die Sprache $L(M_1) \cap L(M_2)$ entscheidet.

c) Konstruieren Sie einen DFA, der die Sprache $\overline{L(M_1)} := \Sigma^* \setminus L(M_1)$ entscheidet.

d) Es sei L eine Sprache, die von einem DFA entschieden wird. Gibt es dann auch für jede Teilmenge $L' \subseteq L$ einen DFA, der L' entscheidet?

Aufgabe 8.2: Existenz endlicher Automaten (2+2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen können von einem DFA entschieden werden? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Das heißt: Geben Sie entweder einen DFA mit allen Komponenten an, wobei für die Zustandsübergangsfunktion ein Übergangsgraph genügt, um zu zeigen das es einen DFA gibt oder nutzen Sie das Pumping Lemma, um zu zeigen das es keinen DFA gibt.

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_1 = |w|_2\}$ mit $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$. Dabei bezeichne $|w|_y$ für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und ein Zeichen $y \in \Sigma$ die Anzahl der Vorkommen von y in w.

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ ist Dezimaldarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl $n \in \mathbb{N}\}$ mit $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$.

Das einzige Wort das mit einer Null beginnt und die Dezimaldarstellung einer Zahl ist, ist das Wort $W = 0$. Somit ist z.B. das Wort 04 keine Dezimaldarstellung eine Zahl.

c) $L_3 = \{a^n b^m \mid \exists g \in \mathbb{N} \colon 2g = m + n\}$.

d) $L_4 = \{a^n b^m \mid \exists g \in \mathbb{N} \colon 2g = m = n\}$.

Aufgabe 8.3: Äquivalenzklassenautomat (2+2 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und sei $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ auf der Menge der Zustände von M eine Äquivalenzrelation ist.

b) Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n und sei $q_0, q_1, \ldots, q_n$ die Zustandsfolge, die der DFA M beim Lesen des Wortes w Durchläuft. Zeigen Sie, dass der Äquivalenzklassenautomat M' beim Lesen des Wortes w die Zustandsfolge $[q_0], [q_1], \ldots, [q_n]$ durchläuft.

Aufgabe 8.4: Minimaler DFA (2+4 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0$ ist ungerade und $|w|_1$ ist ungerade$\}$.

a) Geben Sie für die Sprache L einen DFA M mit vier Zuständen an. Geben Sie alle Komponenten an, wobei es für die Zustandsübergangsfunktion genügt einen Übergangsgraphen anzugeben.

b) Zeigen Sie, dass es keinen DFA M' mit weniger als 4 Zuständen gibt, der die Sprache L entscheidet.

Hinweis: Finden Sie vier Worte die paarweise nicht in Nerode-Relation stehen und führen Sie einen indirekten Beweis ähnlich zu dem Beweis von Lemma 3.17.