Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2016/17

Abgabe: 15.11.16 bis 10.15 Uhr
Besprechung: 21.11.16-25.11.16

Prof. Dr. Stefan Kratsch
Eva-Maria Hols
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Induktion (3+3 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

a) dass für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

b) dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

Hinweis: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ heißt Binomialkoeffizient und es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Zudem gilt nach Konvention: $0! = 1$ und $0^0 = 1$.

Aufgabe 4.2: Quantoren (2+2 Punkte)

a) Geben Sie folgende Aussagen mithilfe von Quantoren wieder.

(i) Für jede reelle Zahl x gilt: Wenn x rational ist, dann auch $\sqrt{x}$.

(ii) Für manche natürliche Zahlen $n \geq 3$ und ganze Zahlen x, y und z gilt $x^n + y^n = z^n$.

b) Negieren Sie die Aussagen aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 4.3: Aussagen über Relationen (4 Punkte)

Seien A, B endliche Mengen und a, b die jeweilige Anzahl ihrer Elemente. Welche der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antworten in jeweils ein bis zwei Sätzen.

a) $A \times B$ ist eine Relation auf A und B.

b) $\emptyset$ ist eine Relation auf A und B.

c) Jede Relation auf A und B ist ein Element von $A \times B$.

d) Jede Relation auf A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.

e) Die Menge aller Relationen auf A und B enthält $A \times B$ als Element.

f) Die Menge aller Relationen auf A und B stimmt mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A \times B)$ überein.

g) Es gibt $2^a 2^b$ viele Relationen auf A und B.

h) Für jedes $(x, y) \in A \times B$ gibt es genauso viele Relationen auf A und B, die (x, y) enthalten, wie Relationen, die (x, y) nicht enthalten

Aufgabe 4.4: Eigenschaften von Relationen (4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Relation $R_3^p = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, \exists z \in \mathbb{Z} : a - b = z \cdot p\}$ für $p \in \mathbb{N}_0$ auf der Menge der ganzen Zahlen. Beweisen Sie welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv, die Relation hat und welche nicht.

Aufgabe 4.5: Beispiele für Relationen (8 Punkte)

Eine Relation kann die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv haben. Alle möglichen Kombinationen dieser Eigenschaften die eine Relation haben kann sind in der Tabelle rechts enthalten. Geben Sie für jede mögliche Kombination eine Relation R auf einer Menge M an oder zeigen Sie das es für diese Kombination keine Relation mit den gewünschten Eigenschaften gibt.
Zum Beispiel ist eine Relation die reflexiv und antisymmetrisch ist, aber weder symmetrisch noch transitiv ist, die Relation $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)\}$ auf der Menge $M = \{a,b,c\}$. Dies entspricht Zeile 11 in der Tabelle.
Hinweis: Versuchen Sie zunächst Standardrelationen wie z.B. $<, \leq, =, \neq, \subseteq, \subset$ einzusortieren. Für Konfigurationen zu denen Sie keine Standardrelationen finden, können Sie z.B. versuchen eine Relation auf einer dreielementigen Menge zu definieren, wie im obigen Beispiel.

reflexiv	symmetr.	antisym.	transitiv
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1