Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2015/16

Abgabe: 03.11.2015, 10:15 Uhr

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

4 Punkte

Geben Sie eine Aussage an, die aus den Aussagen A, B und C durch insgesamt höchstens 7 Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen entsteht und die die rechts abgebildete Wahrheitstabelle erfüllt. Schaffen Sie es auch mit 6 Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen?

A	B	C	?
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Aufgabe 2.2

6 Punkte

Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das zu einer gegebenen Wahrheitstabelle eine Aussage findet, die diese Wahrheitstabelle erfüllt und die aus den gegebenen Grundaussagen durch Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen entsteht.

Aufgabe 2.3

4 Punkte

Beweisen Sie mithilfe eines indirekten Beweises, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar sein muss, wenn n^3 durch 2 teilbar ist.

Aufgabe 2.4

3+3 Punkte

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $T(1) = 1$ und $T(n) = T(n-1)+n$ für $n \geq 2$. Es gilt $T(n) \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.5

6 Zusatzpunkte

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $G = \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$ ein $2^n \times 2^n$-Gitter. Beweisen Sie die folgende Aussage: Für ein beliebiges Element $z \in G$ ist die Menge $G \setminus \{z\}$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\{(x, y), (x, y \pm 1), (x \pm 1, y)\}$. Wir nutzen dies als abkürzende Schreibweise dafür, dass jede Menge eine der folgenden vier Formen besitzt: $\{(x, y), (x, y + 1), (x + 1, y)\}$, $\{(x, y), (x, y - 1), (x + 1, y)\}$, $\{(x, y), (x, y + 1), (x - 1, y)\}$ oder $\{(x, y), (x, y - 1), (x - 1, y)\}$.

Hinweis: Skizzieren Sie das Problem graphisch und verwenden Sie vollständige Induktion.