Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

3+3 Punkte

Geben Sie für die folgenden Strukturen mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

(a) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $x * y = x + y - 1$

(b) $(\{0,1\}^n, \bullet)$ mit $(a_1, \ldots, a_n) \bullet (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$

Aufgabe 10.2

2+2+2 Punkte

Seien M eine nichtleere Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf M. Wir definieren auf $\mathcal{P}(M)$ eine Verknüpfung $\circ$ durch $A \circ B = \{a \star b :\ a \in A \wedge b \in B\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ eine Halbgruppe ist, wenn $(M, \star)$ eine Halbgruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \circ)$ ein Monoid ist, wenn $(M, \star)$ ein Monoid ist.

(c) Ist $(\mathcal{P}(M), \circ)$ stets eine Gruppe, wenn $(M, \star)$ eine Gruppe ist?

Aufgabe 10.3

4 Punkte

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $g \circ g = e$ für alle $g \in G$, wobei e das neutrale Element von $(G, \circ)$ ist. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 10.4

4 Punkte

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid und sei $G \subseteq M$ die Menge der invertierbaren Elemente. Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ eine Gruppe ist, wobei $\star : G \times G \to G$ die auf G eingeschränkte Verknüpfung $\circ$ bezeichnet, d.h. es gilt $x \star y = x \circ y$ $\forall x, y \in G$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\star$ tatsächlich eine Verknüpfung auf G ist.

Aufgabe 10.5

4 Zusatzpunkte

Seien $(M, \circ)$ eine Halbgruppe und $e \in M$ ein Element von M mit der Eigenschaft, dass $e \circ x = x$ für alle $x \in M$ gilt und für jedes $y \in M$ ein $x \in M$ mit $x \circ y = e$ existiert. Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist.