
Algorithmen und Berechnungskomplexität I WS 15/16

Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

6. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Abgabe: 01.12. (12³⁰)

Aufgabe 21: Untere Schranken (4 Punkte)

a) Sei $f(n), n \in \mathbb{N}$, die Folge der Fibonacci-Zahlen, definiert als:

$$\begin{aligned}f(0) &= 1 \\f(1) &= 1 \\f(n) &= f(n-1) + f(n-2).\end{aligned}$$

Erfolge die Berechnung so, wie in Skript auf Seite 29 angegeben, also ohne Wiederverwendung von Teilergebnissen. Zeigen Sie: Für die Anzahl Knoten $K(n)$ des Rekursionsbaums zur Berechnung von $f(n)$ gilt:
$$K(n) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b) Wie im Skript auf Seite 34 ersichtlich, ist die Matrizenmultiplikation assoziativ – mit anderen Worten ist die Klammerung für das Ergebnis irrelevant. Wohl aber ist die Klammerung für den Aufwand der Berechnung des Multiplikationsergebnisses relevant: Es gilt, eine Klammerung zu finden, die möglichst wenig Aufwand verursacht. Zeigen Sie, dass die im Skript angegebene Rekursionsgleichung

$$M(n) := \sum_{k=1}^{n-1} M(k) \cdot M(n-k),$$

mit $M(1) = 1$, in $\Omega(2^n)$ liegt.

Bitte wenden!

Aufgabe 22: Entwurf und Analyse eines Algorithmus (4 Punkte)

In einem Array sei eine Zeichenkette, wie zum Beispiel

$$[K([la\langle m(me)r\{a}\rangle u]sd(ru))c\langle k\rangle]$$

gegeben. Die Kette besteht aus beliebig vielen Klammerzeichen $[,], \{, \}, (,), \langle, \rangle$, sowie Groß- und Kleinbuchstaben des Alphabets. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der testet, ob eine solche Zeichenkette syntaktisch korrekt geklamert ist. Nutzen Sie in ihrem Algorithmus die in der Vorlesung spezifizierte Datenstruktur Stapel (Stack) mit den Operationen *Push*, *Pop* bzw. *Top*. Welche Laufzeit hat ihr Algorithmus schlimmstenfalls?

Aufgabe 23: Datenstrukturen: Bäume (4 Punkte)

Sei B ein Binärbaum der Höhe h . Der Klarheit halber sei noch einmal definiert: Die Wurzel liege in Höhe 0. Zeigen Sie via Induktion: In Höhe i gibt es maximal 2^i viele Knoten.

Aufgabe 24: Höhe eines AVL-Baums (4 Punkte)

Gibt es einen AVL-Baum der Höhe 9 mit 100 Knoten? Beweisen Sie Ihre Aussage!