Algorithmen und Berechnungskomplexität I WS 15/16

Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

13. Aufgabenblatt zur Vorlesung **Abgabe: -**

Aufgabe 49: Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen

In dieser Aufgabe sollen Abgeschlossenheitseigenschaften regulärer Sprachen bewiesen werden. Seien im folgenden L und L' Sprachen über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

a) Wenn L regulär ist, dann ist auch $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ regulär, d. h. die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung.

b) Wenn L und L' regulär sind, dann ist auch $L \cap L'$ regulär, d. h. die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich der Durchschnittsbildung.

c) Wenn L und L' regulär sind, dann ist auch $L \setminus L'$ regulär, d. h. die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich der Differenzmengenbildung.

d) Die Abgeschlossenheitseigenschaften erleichtern Beweise, dass bestimmte Sprachen nicht regulär sind. Wir geben nun hierzu ein Beispiel. Beginnen Sie mit der Tatsache, dass die Sprache

$$L_1 = \{a^m b^m \mid m \in N_0\}$$

nicht regulär ist. Beweisen Sie unter Zuhilfenahme von $(a) - (c)$, dass die Sprache

$$L_2 = \{a^i b^j \mid i \neq j \text{ mit } i, j \in N_0\}$$

nicht regulär ist.

Frage: Sollten wir besser schreiben „Sie dürfen voraussetzen, dass die Sprache L_1 nicht regulär ist, oder wissen die Studenten das schon?“

Bitte wenden!

Aufgabe 50: Zustandsdiagramme

a) Geben Sie das *vollständige* Zustandsdiagramm eines nichtdeterministischen endlichen Automaten an, der Worte aus $\{a,b\}^*$ akzeptiert, falls das drittletzte Zeichen ein b ist.

b) Geben Sie das *vollständige* Zustandsdiagramm für einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten an.

Aufgabe 51: Pumping-Lemma für reguläre Mengen

Für einen Vektor $x = x_n \dots x_0 \in \{0,1\}^{n+1}$ bezeichne $Num(x)$ die durch x dargestellte Zahl, d. h. $Num(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i$. Zeige mit Hilfe des Pumping-Lemmas für endliche Automaten (Lemma 54 aus dem Skript), dass die Sprache

$$L = \{x_n \dots x_0 y_n \dots y_0 z_n \dots z_0 \in \{0,1\}^{3(n+1)} \mid Num(x) + Num(y) = Num(z)\}$$

nicht regulär ist, wobei $x = x_n \dots x_1$, $y = y_n \dots y_1$ und $z = z_n \dots z_1$ (L ist sozusagen die Sprache der korrekten Binäraddition).

Bitte wenden!

Aufgabe 52: Minimierung eines deterministischen Automaten

Minimieren Sie den folgenden deterministischen endlichen Automaten M: Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Zustandsmenge $Q = \{1, \ldots, 10\}$, Anfangszustand $q_0 = 1$, akzeptierende Zustände $F = \{8\}$, und Übergangsfunktion δ wie in folgender Tabelle definiert, wobei q den aktuellen Zustand bezeichnet und q' den Folgezustand. M ist auch in Abbildung 1 dargestellt.

q	q'	
	a	b
1	6	5
2	2	4
3	8	1
4	7	3
5	2	4
6	7	2
7	1	2
8	8	7
9	10	5
10	10	3

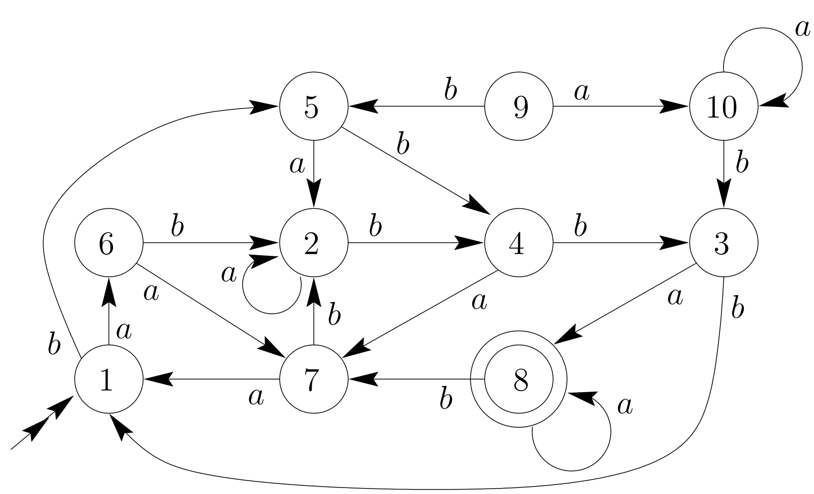

Abbildung 1: Minimieren Sie diesen Automaten.

Bitte wenden!

Aufgabe 53: Von einer Grammatik erzeugte Sprache

Gegeben folgende Grammatik G über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Beweisen Sie, dass die Grammatik die Sprache aller Palindrome über dem Alphabet Σ definiert.

Es sei $V = \{S\}$, und P enthalte die Regeln $S \to \epsilon, 0, 1, 0S0, 1S1$.

Ein Palindrom ist ein Wort, das vorwärts und rückwärts gelesen identisch ist.

Aufgabe 54: Reguläre Grammatiken

Geben Sie reguläre Grammatiken für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an und begründen Sie, dass die Sprachen auch tatsächlich von diesen regulären Grammatiken erzeugt werden.

$a)$ Die Menge der Wörter, bei denen benachbarte Bits nicht übereinstimmen.

$b)$ Die Menge der Wörter, deren Anzahl Nullen durch 5 teilbar ist.