# Offline Bewegungsplanung: Polyeder

Elmar Langetepe
University of Bonn

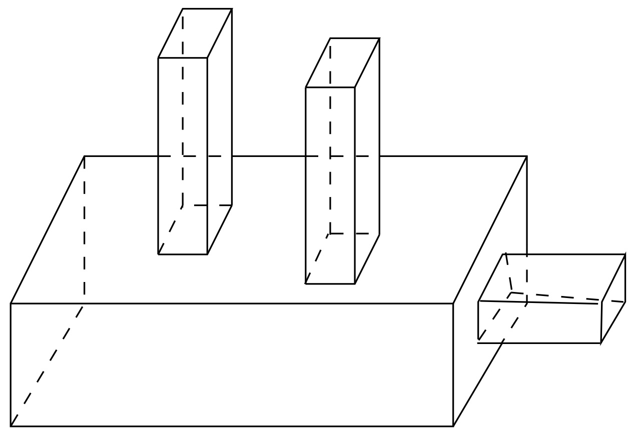
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D

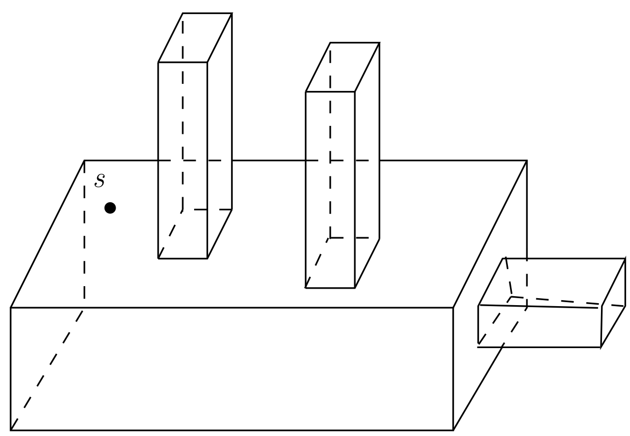
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D



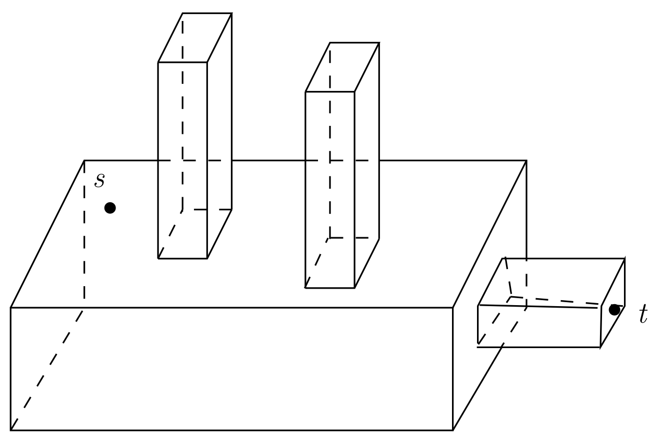
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D



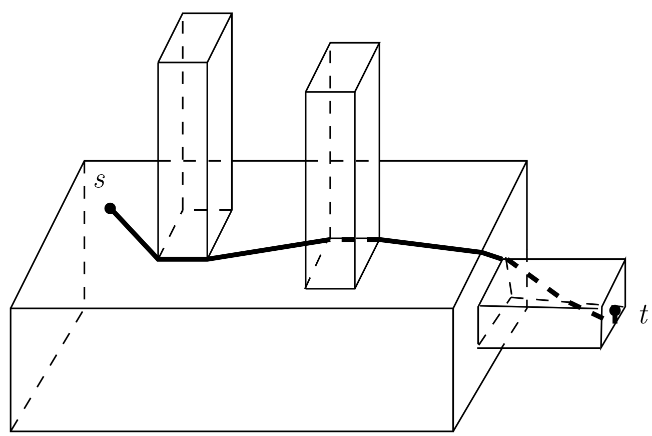
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D



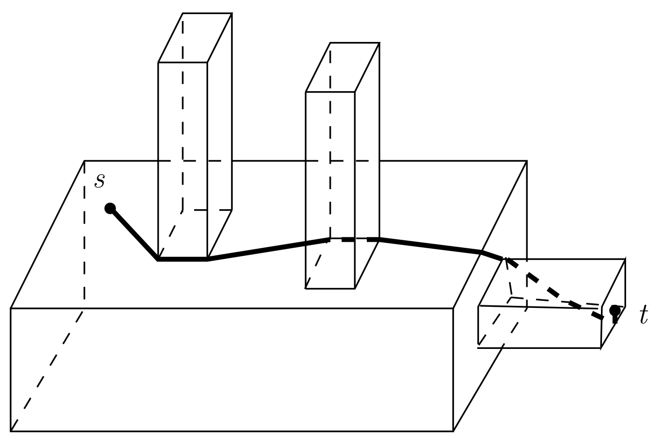
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D



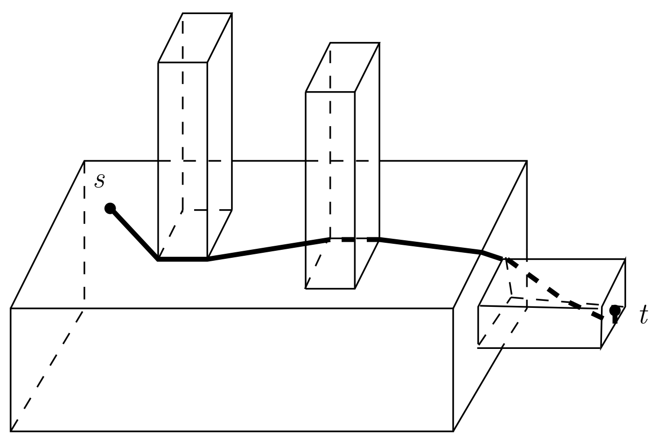
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D
- Rand besteht aus Polygonen



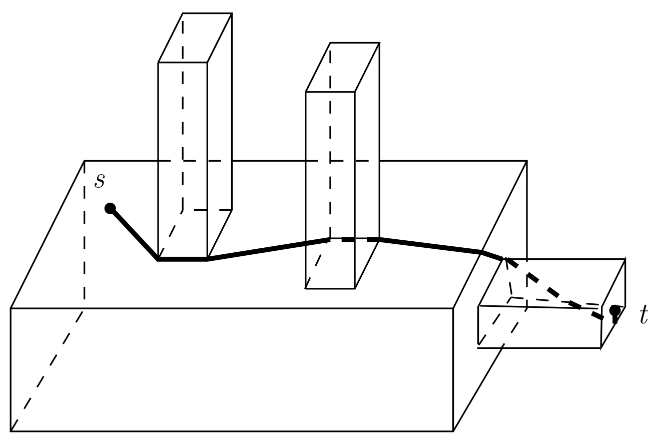
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D
- Rand besteht aus Polygonen
- Keine dünnen Stellen:



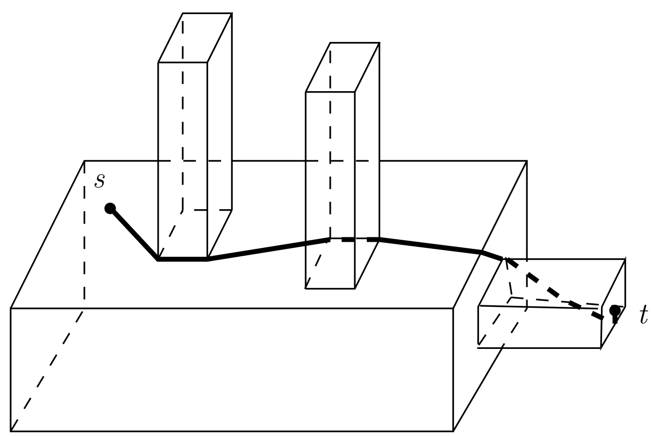
# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D
- Rand besteht aus Polygonen
- Keine dünnen Stellen: $\epsilon$-Kugeln



# Downgrading: Oberfläche Polyeder!

- Natürliche Erweiterung der Polygone auf 3D
- Rand besteht aus Polygonen
- Keine dünnen Stellen: $\epsilon$-Kugeln
- Datenstruktur QEDS: Triangulation Oberflächen, Navigation!



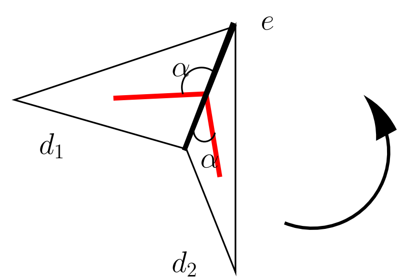
# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

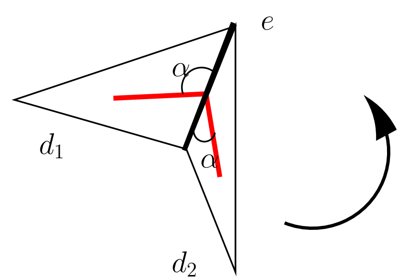
- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege
- Alle Kanten: Eingangswinkel=Ausgangswinkel




(i)

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

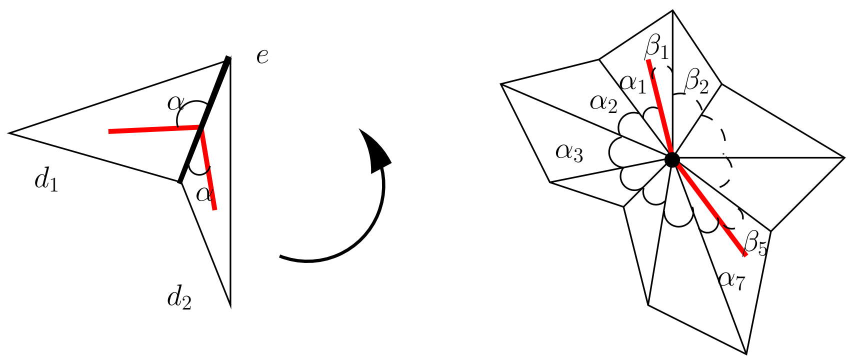
- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege
- Alle Kanten: Eingangswinkel=Ausgangswinkel
- Knoten: Nur *nicht-konvexe* Ecken




(i)

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

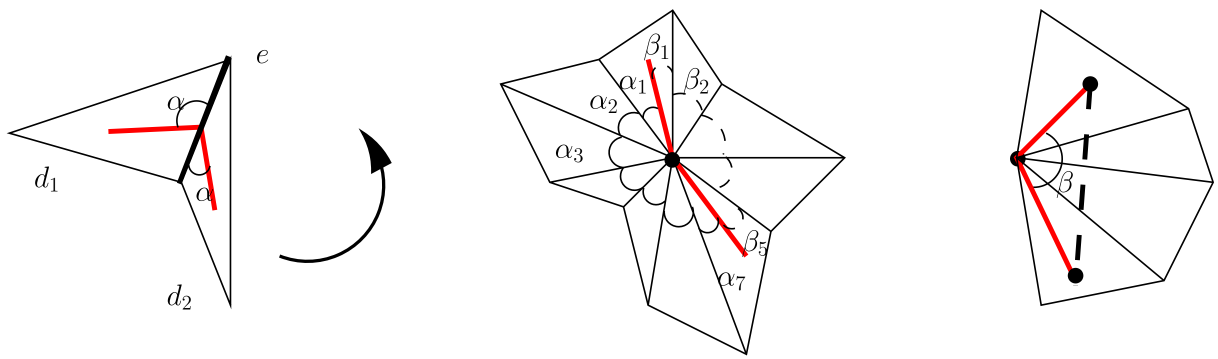
- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege
- Alle Kanten: Eingangswinkel=Ausgangswinkel
- Knoten: Nur *nicht-konvexe* Ecken




(i) (ii)

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

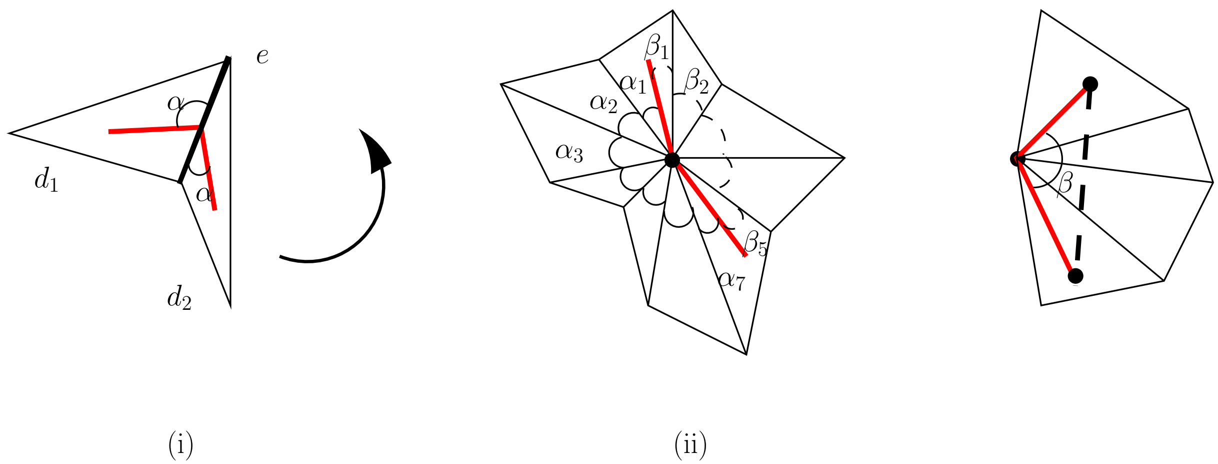
- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege
- Alle Kanten: Eingangswinkel=Ausgangswinkel
- Knoten: Nur *nicht-konvexe* Ecken




(i) (ii)

# Lokale Eigenschaften (geodätisch)! Lem. 1.39

- Lokale Eigenschaften (geodätisch) kürzester Wege
- Alle Kanten: Eingangswinkel=Ausgangswinkel
- Knoten: Nur *nicht-konvexe* Ecken
- Konvexe Ecke: Ebenenschnitt



# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

$\pi_i$, $\pi_j$ kürzeste von $s$ nach $b_i$ resp. $b_j$

# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

$\pi_i$, $\pi_j$ kürzeste von $s$ nach $b_i$ resp. $b_j$

**(i)** $\pi_i$ hat keine Selbstschnitte

# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

$\pi_i$, $\pi_j$ kürzeste von $s$ nach $b_i$ resp. $b_j$

**(i)** $\pi_i$ hat keine Selbstschnitte

**(ii)** $\pi_i$ schneidet jede Fläche max. einmal

# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

$\pi_i$, $\pi_j$ kürzeste von $s$ nach $b_i$ resp. $b_j$

**(i)** $\pi_i$ hat keine Selbstschnitte

**(ii)** $\pi_i$ schneidet jede Fläche max. einmal

**(iii)** $\pi_i$, $\pi_j$ kreuzen sich nicht im Innern einer Fläche

# Globale Eigenschaften (Kürzeste)! Lem. 1.40

$\pi_i$, $\pi_j$ kürzeste von $s$ nach $b_i$ resp. $b_j$

**(i)** $\pi_i$ hat keine Selbstschnitte

**(ii)** $\pi_i$ schneidet jede Fläche max. einmal

**(iii)** $\pi_i$, $\pi_j$ kreuzen sich nicht im Innern einer Fläche

Beweis!!! Lokal verkürzbar! (Tafel)

# Berechnungsansatz: Ideen

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret
- Kombinatorisch gleiche zusammenfassen

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret
- Kombinatorisch gleiche zusammenfassen
- Zunächst nur Intervalle auf Kanten betrachten

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret
- Kombinatorisch gleiche zusammenfassen
- Zunächst nur Intervalle auf Kanten betrachten
- Sukzessive erweitern: Continous Dijkstra

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret
- Kombinatorisch gleiche zusammenfassen
- Zunächst nur Intervalle auf Kanten betrachten
- Sukzessive erweitern: Continous Dijkstra
- In die Dreiecke fortpflanzen

# Berechnungsansatz: Ideen

- Locus approach: Startpunkt $s$ fest
- Nur letzte Schritte des Weges konkret
- Kombinatorisch gleiche zusammenfassen
- Zunächst nur Intervalle auf Kanten betrachten
- Sukzessive erweitern: Continous Dijkstra
- In die Dreiecke fortpflanzen
- Query Struktur für alle Punkte auf $P$

# Kombinatorik: Gesamtweg analysieren!

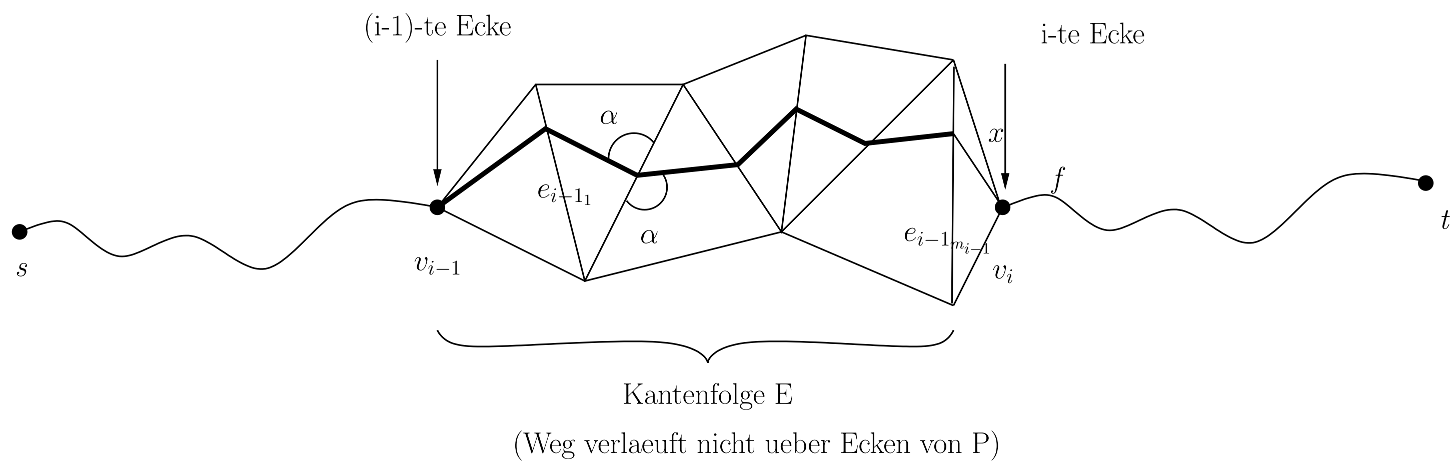
# Kombinatorik: Gesamtweg analysieren!

Folge von Kanten und Knoten!

# Kombinatorik: Gesamtweg analysieren!

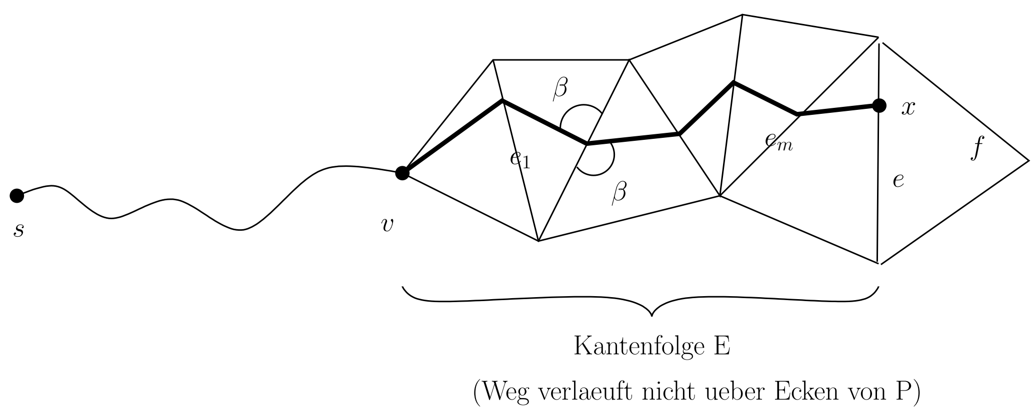
Folge von Kanten und Knoten!

$$\pi = \underbrace{v_0}_{=s}, \underbrace{e_{1,1}, \ldots, e_{1,m_1}}_{\text{Kanten}}, \underbrace{v_1}_{\text{2. Ecke}},$$
$$\underbrace{e_{2,1}, \ldots, e_{2,m_2}}_{\text{Kanten}}, v_2, \ldots, e_{k-1,1}, \ldots, e_{k-1,m_{k-1}}, \underbrace{v_k}_{=t}$$



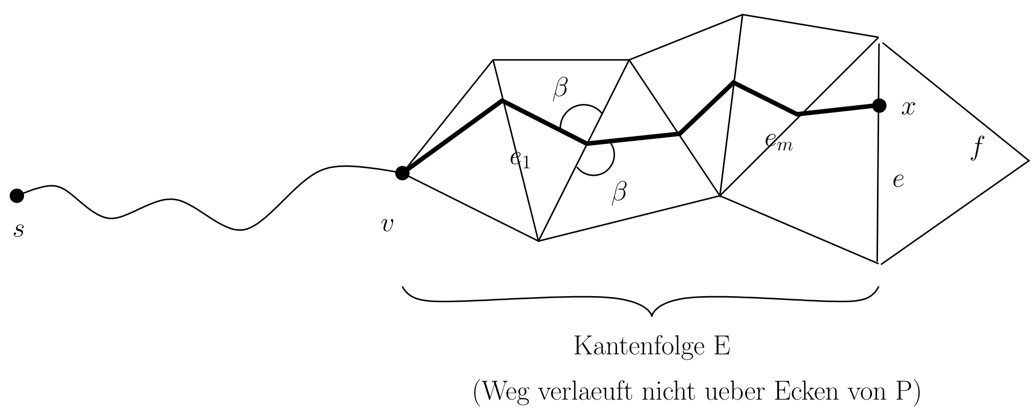
# Letzte Schritte: Für beliebige Kanten!

- Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E



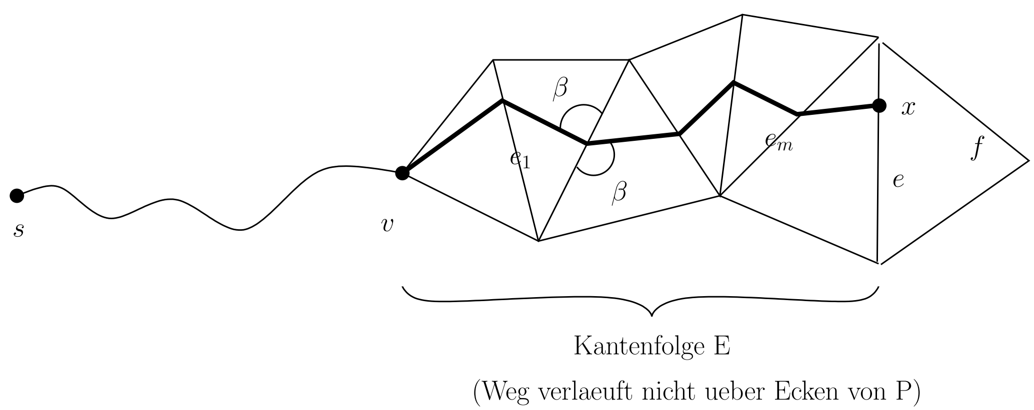
# Letzte Schritte: Für beliebige Kanten!

- Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E
- Kombinatorisch gleiche zuammenfassen,



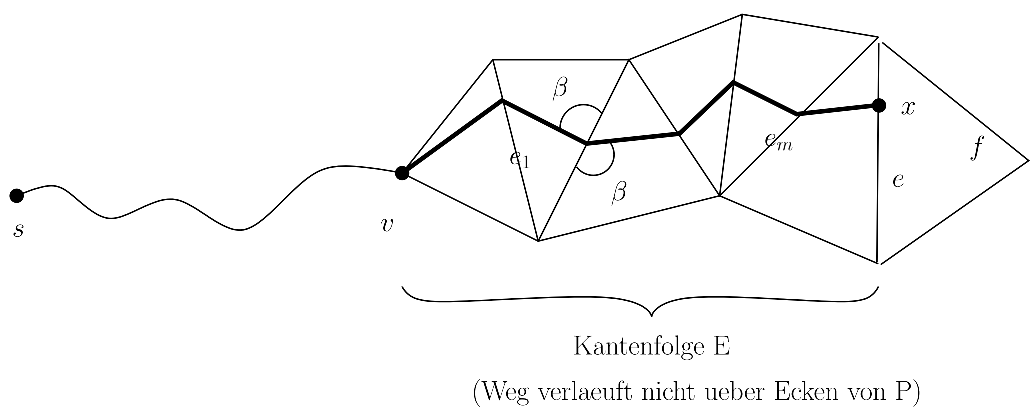
# Letzte Schritte: Für beliebige Kanten!

- Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E
- Kombinatorisch gleiche zuammenfassen, Dreiecke nicht beachten



# Letzte Schritte: Für beliebige Kanten!

- Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E
- Kombinatorisch gleiche zuammenfassen, Dreiecke nicht beachten
- Optimalitätsintervall: Def. 1.42

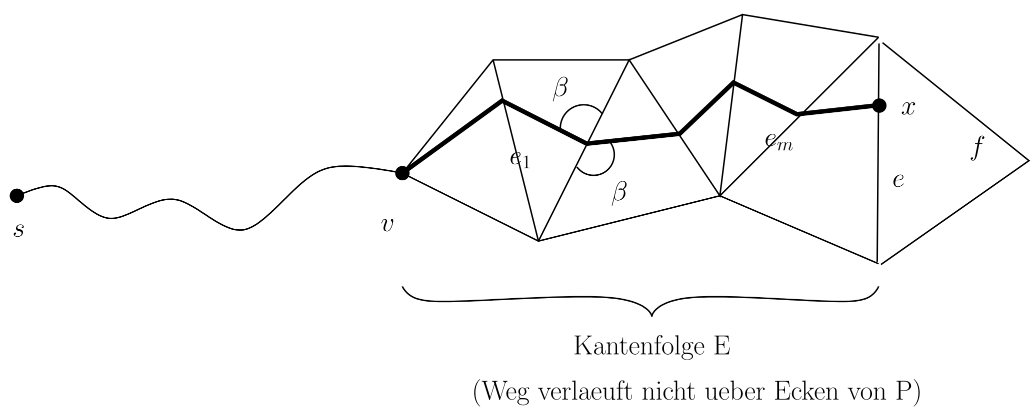


# Letzte Schritte: Für beliebige Kanten!

- Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E
- Kombinatorisch gleiche zuammenfassen, Dreiecke nicht beachten
- Optimalitätsintervall: Def. 1.42

$I(v, \mathsf{E}) := \{x \in e|$ $\exists$ Kürzeste $\delta$ von $s$ nach $x$ mit

- $\delta \cap \mathrm{INT}(f) = \emptyset$
- $\delta$ endet mit $v, e_1, \ldots, e_m, x\}$ .



# Lem. 1.43 Eigenschaften: $I(v, \epsilon)$

**(i)** Jede solche Menge $I(v, \mathsf{E})$ ist Intervall auf $e$ (evtl. leer).

**(ii)** Zwei verschiedene Intervalle können sich nicht überlappen.

**(iii)** $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathsf{E})$ ganz überdeckt.

Beweis!!! Gegeben: Kante $e$, letzter Knoten $v$, Kantenfolge E

# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

# $I(v, \mathsf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!

# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

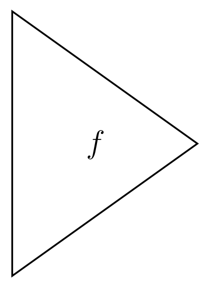
- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$

# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$

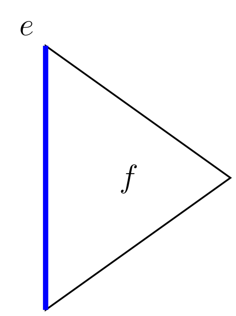
# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



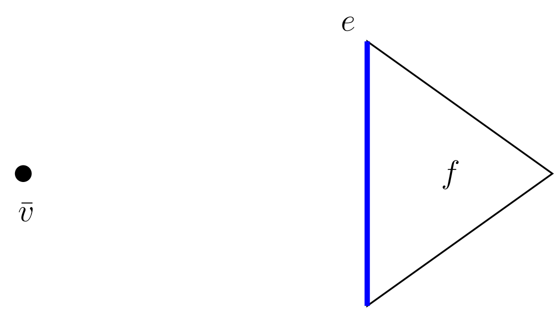
# $I(v, \mathsf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



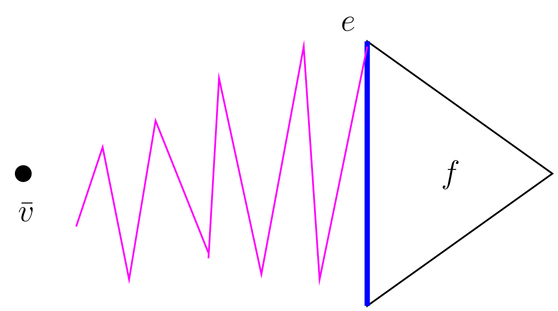
# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



# $I(v, \mathsf{E})$ ist Intervall auf $e$

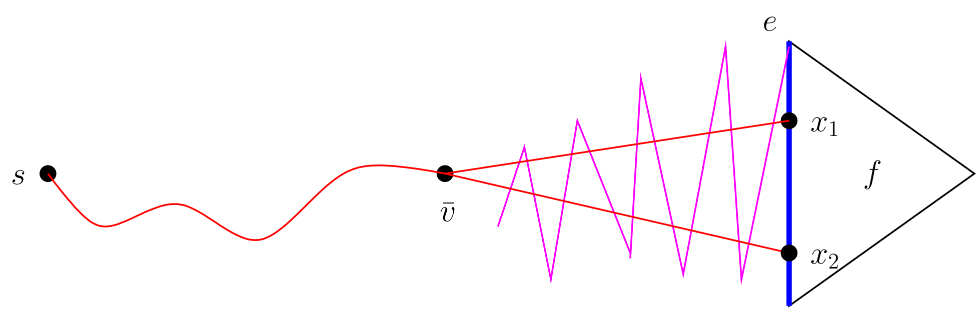
- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$




E (aufklappen in Ebene zu f)

# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

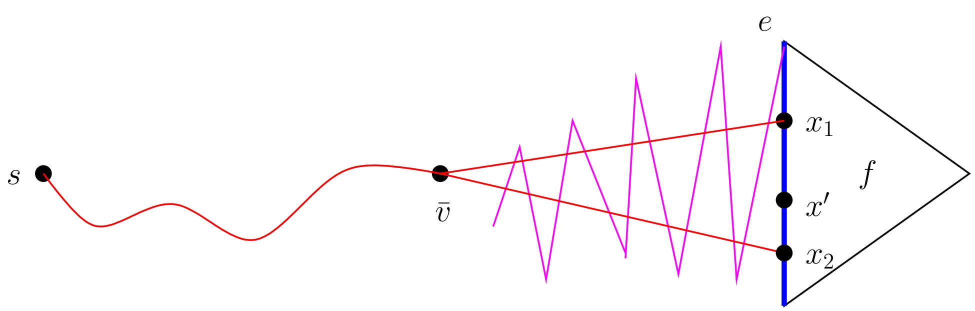
- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$




E (aufklappen in Ebene zu f)

# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

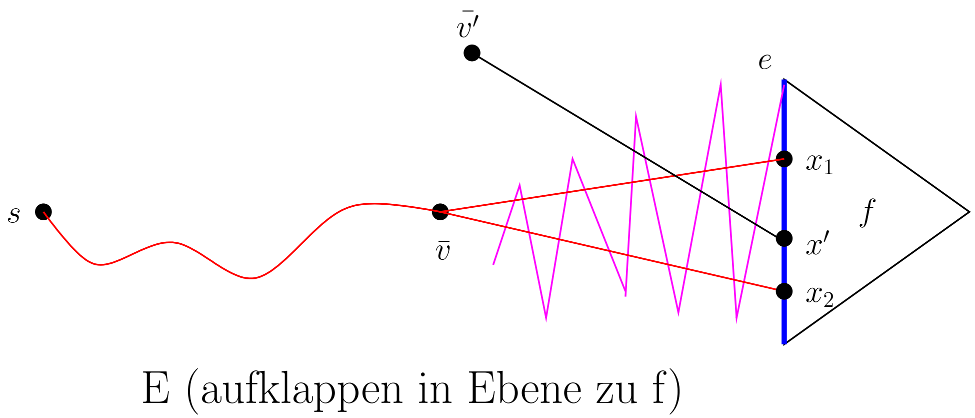
- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$




E (aufklappen in Ebene zu f)

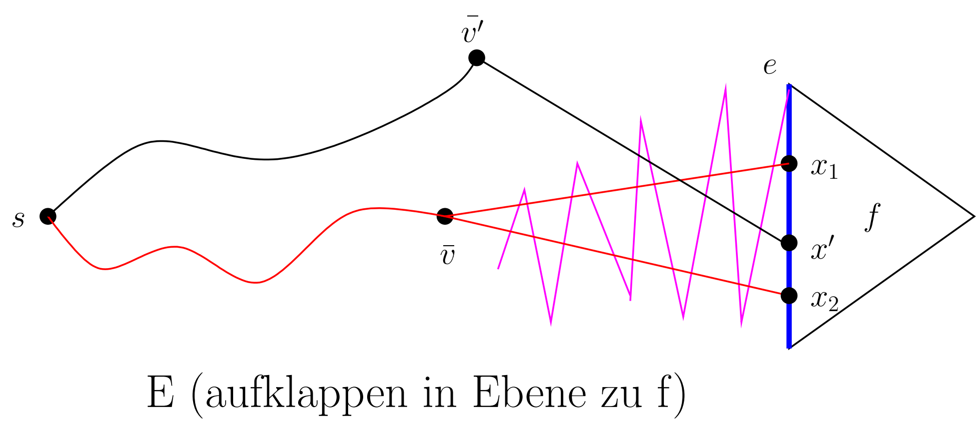
# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



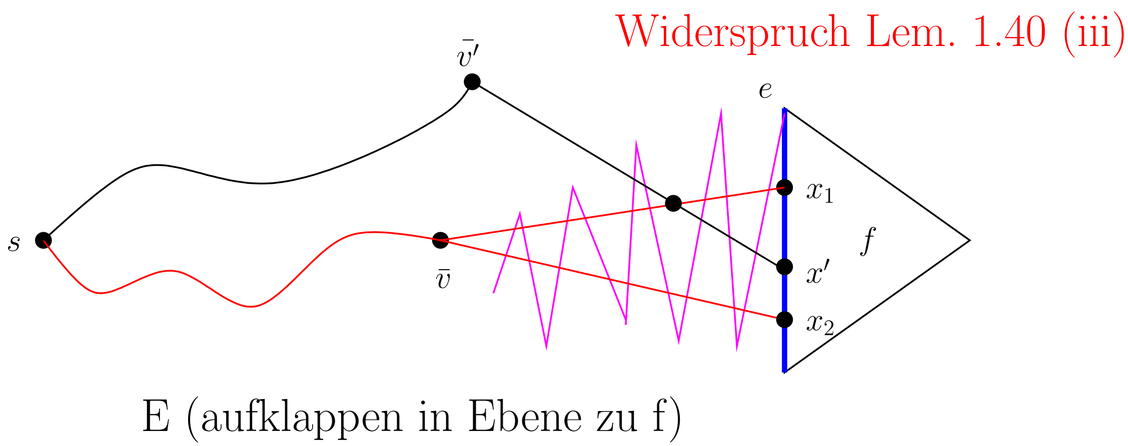
# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



# $I(v, \mathbf{E})$ ist Intervall auf $e$

- $I(v, \mathsf{E})$ leer $\Rightarrow$ fertig!
- Annahme: Es gibt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ in $I(v, \mathsf{E})$
- Zu zeigen: Alle Punkte dazwischen gehören zu $I(v, \mathsf{E})$



# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

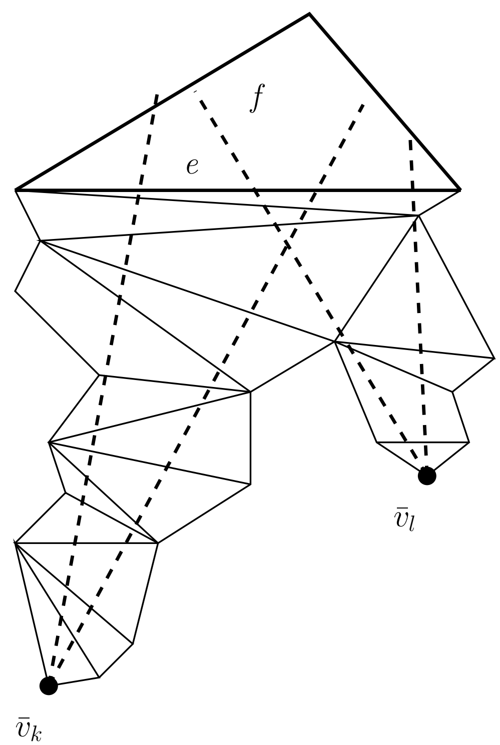
- Gleiche Argumentation geht auch!!

# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!

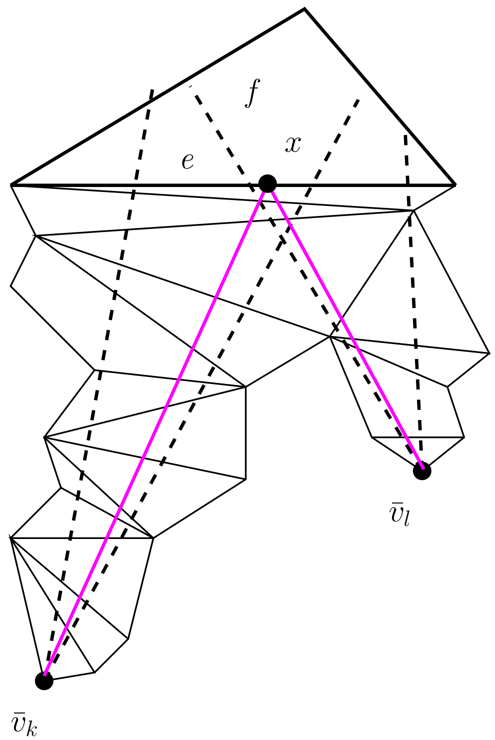
# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!



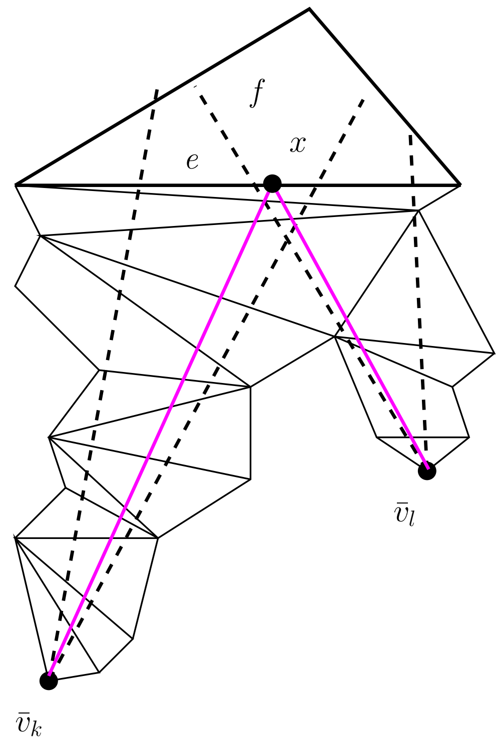
# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!



# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

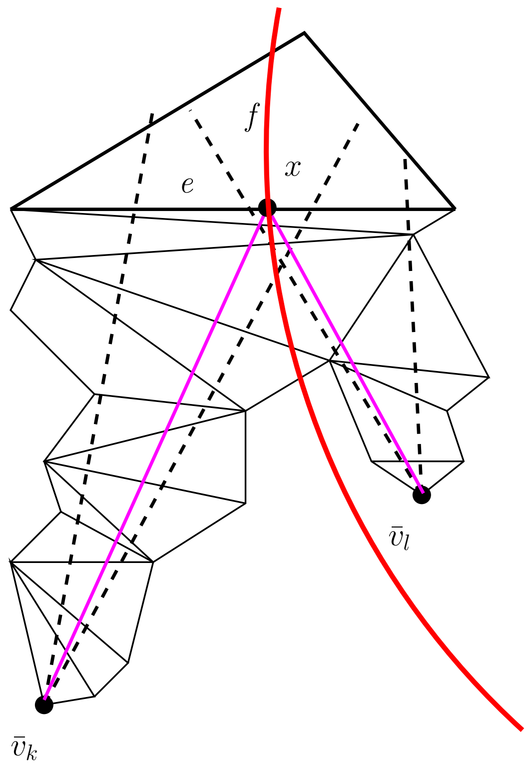
- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!




$$|\bar{v}_k - x| + d(v_k, s) = |\bar{v}_l - x| + d(v_l, s)$$

# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!

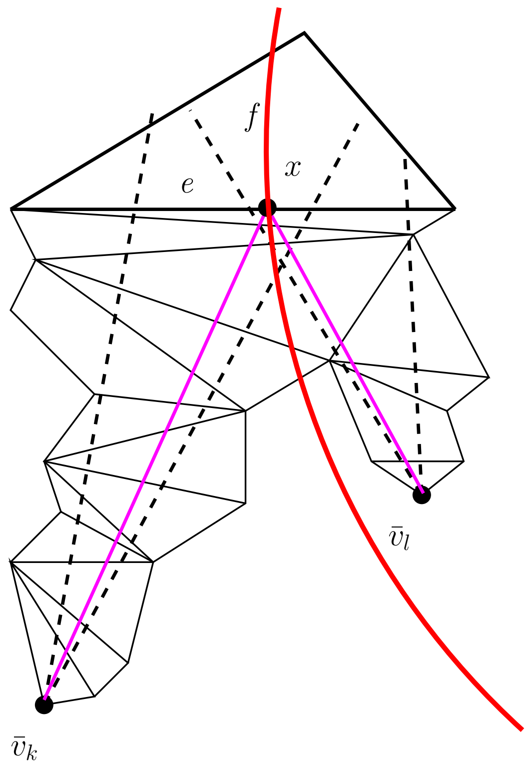



$$|\bar{v}_k - x| + d(v_k, s) = |\bar{v}_l - x| + d(v_l, s)$$

Hyperbel

# Intervalle $I(v, \mathbf{E})$ überlappen sich nicht

- Gleiche Argumentation geht auch!!
- Schönere Argumentation!!




$$|\bar{v}_k - x| + d(v_k, s) = |\bar{v}_l - x| + d(v_l, s)$$

Hyperbel

Genau ein $x$!!!

# $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathbf{E})$ überdeckt

# $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathbf{E})$ überdeckt

Klar!

# $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathbf{E})$ überdeckt

Klar! Jeder Punkt $x \in e$ wird von einem Kürzesten Weg besucht!

# $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathbf{E})$ überdeckt

Klar! Jeder Punkt $x \in e$ wird von einem Kürzesten Weg besucht!

Insgesamt:

# $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathbf{E})$ überdeckt

Klar! Jeder Punkt $x \in e$ wird von einem Kürzesten Weg besucht!

Insgesamt: Lem. 1.43:

# $e$ **wird von Intervallen** $I(v, \mathbf{E})$ **überdeckt**

Klar! Jeder Punkt $x \in e$ wird von einem Kürzesten Weg besucht!

Insgesamt: Lem. 1.43:

**(i)** Jede solche Menge $I(v, \mathsf{E})$ ist Intervall auf $e$ (evtl. leer).
**(ii)** Zwei verschiedene Intervalle können sich nicht überlappen.
**(iii)** $e$ wird von Intervallen $I(v, \mathsf{E})$ ganz überdeckt.

# Alle $I(v, \mathbf{E})$ berechnen!

# Alle $I(v, \mathbf{E})$ berechnen!

- Wie viele?

# Alle $I(v, \mathbf{E})$ berechnen!

- Wie viele?
- Was machen wir mit dem Inneren der Dreiecke?
- Lem. 1.44: Kante $e$, $O(n)$ Intervalle $I(v, \epsilon)$

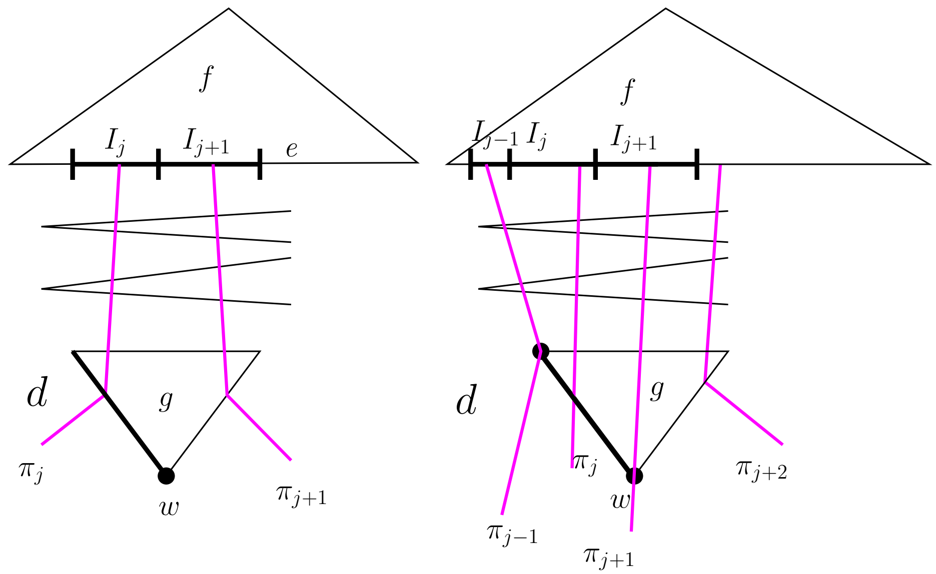
# Alle $I(v, \mathbf{E})$ berechnen!

- Wie viele?
- Was machen wir mit dem Inneren der Dreiecke?
- Lem. 1.44: Kante $e$, $O(n)$ Intervalle $I(v, \epsilon)$
- Zählargument: Klassisch!!!

# **Lem. 1.44:** $O(n)$ **Intervalle** $I(v, \mathbf{E})$

# Lem. 1.44: $O(n)$ Intervalle $I(v, \mathbf{E})$

Benachbarte Intervalle trennen sich!!

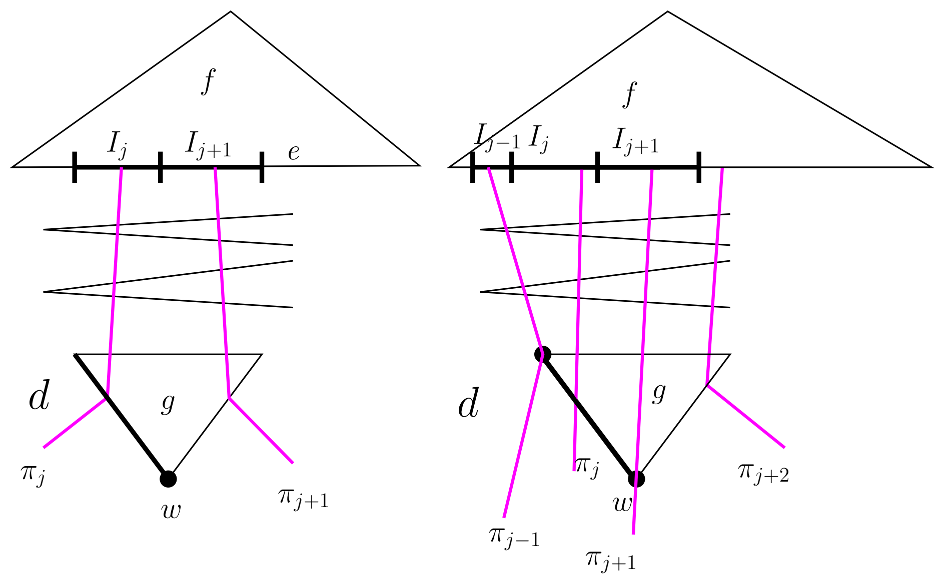



(i) (ii)

- Kante $d$ kann max zweimal als Trenner vorkommen!!

# **Lem. 1.44**: $O(n)$ **Intervalle** $I(v, \mathbf{E})$

Benachbarte Intervalle trennen sich!!




(i) (ii)

- Kante $d$ kann max zweimal als Trenner vorkommen!!
- Wegen Schnitteigenschaft!! Ausklappen ohne Überlappungen!

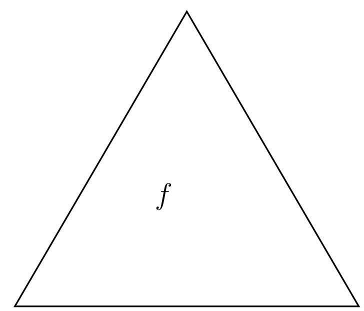
# Das Innere der Dreiecke füllen

# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathsf{E})$ berechnet!

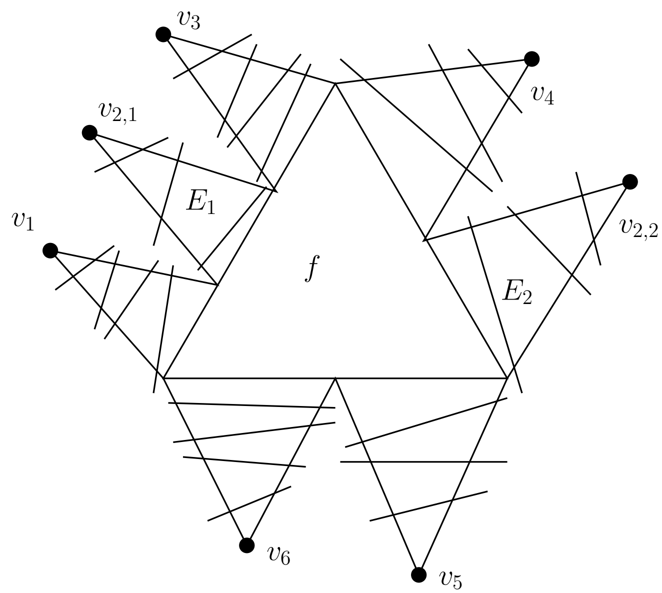
# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathsf{E})$ berechnet! Situation für jedes Dreieck!



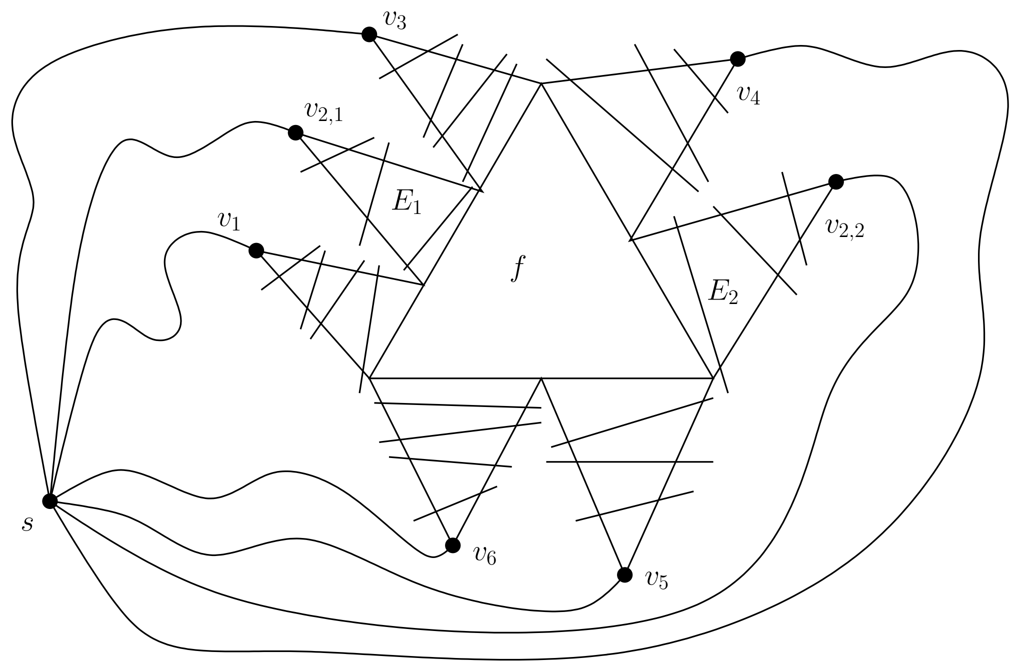
# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathsf{E})$ berechnet! Situation für jedes Dreieck! Mehrere Kantenfolgen!!



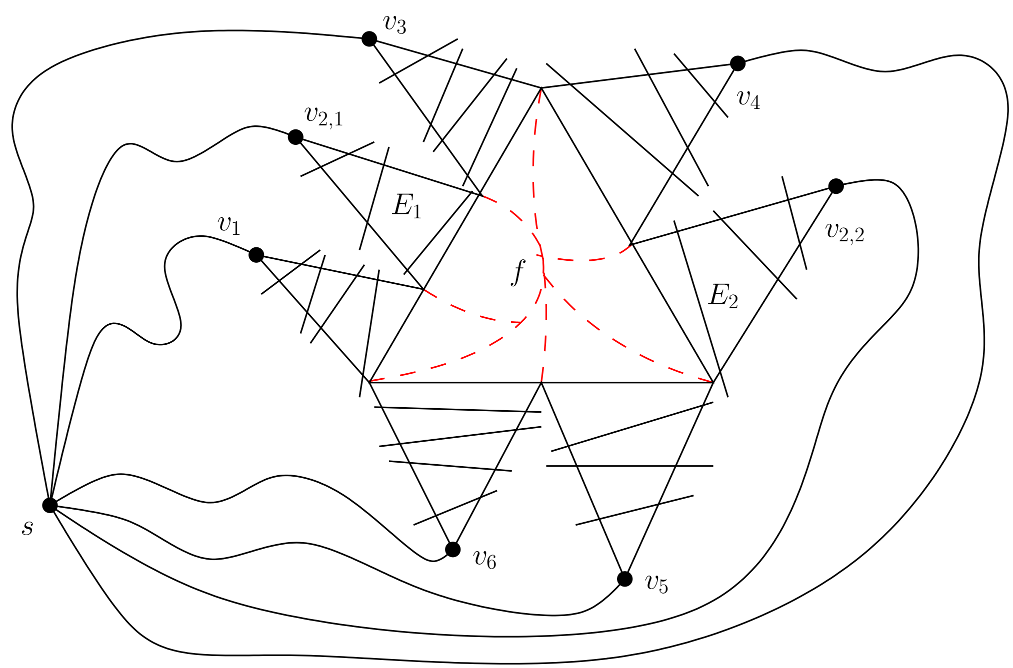
# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathsf{E})$ berechnet! Situation für jedes Dreieck! Mehrere Kantenfolgen!!



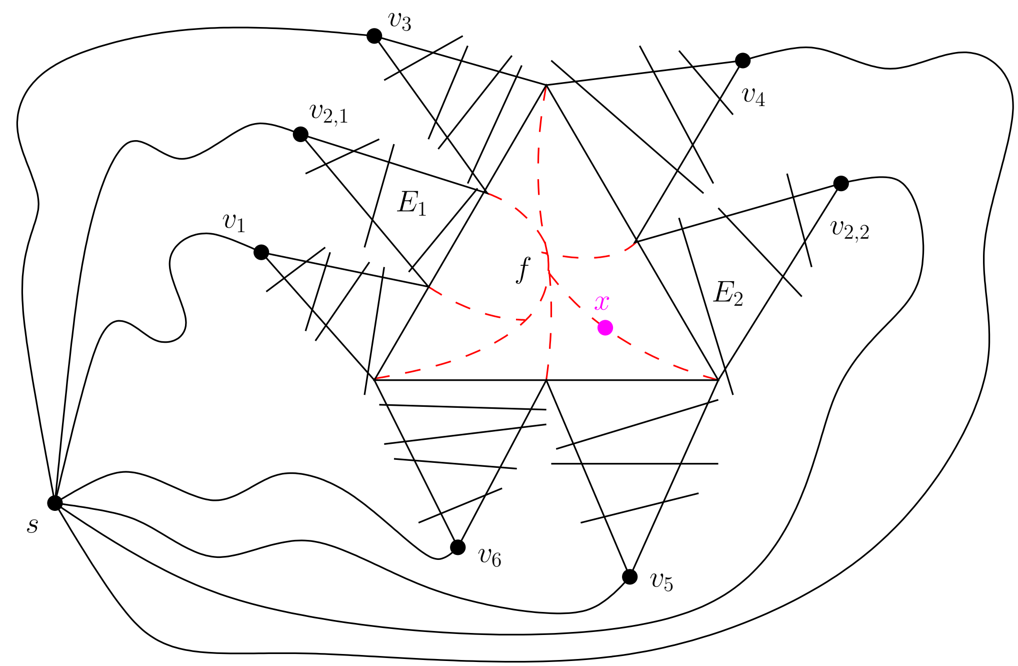
# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathrm{E})$ berechnet! Situation für jedes Dreieck! Mehrere Kantenfolgen!!



# Das Innere der Dreiecke füllen

Annahme: Intervalle $I(v, \mathsf{E})$ berechnet! Situation für jedes Dreieck!
Mehrere Kantenfolgen!!




$$|x - \bar{v}_{2,2}| + d(s, v_{2,2}) = |x - \bar{v}_5| + d(s, v_5)$$