Algorithmen und Berechnungskomplexität I, WS 12/13
Präsenzübungsblatt 1
Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

- *Hier kann man sich zu unserer Mailingliste anmelden: https://lists.iai.uni-bonn.de/mailman/listinfo.cgi/vl-algber1*
- *Wer noch keiner Übungsgruppe zugeordnet ist und dennoch am Übungsbetrieb teilnehmen möchte, kontaktiert bitte Rainer Penninger (penninge@cs.uni-bonn.de).*

Aufgabe 1: Asymptotisches Wachstum von Funktionen, Teil 1

Sei $G = \{2^{n+n}, n, n^2, n \cdot \log n, \log n, 3^{n+2}, n!, n^n\}$ eine Menge von Funktionen $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ordnen Sie den nachstehenden Funktionen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jeweils eine Funktion g_i der Menge G zu, so dass gilt:

$$f_i(n) = \Theta(g_i(n)).$$

1. $f_1(n) = 7n^2 + 18n + 300$.
2. $f_2(n) = \log\left(\frac{n+1}{2}\right) + 7n$.
3. $f_3(n) = 7n! + 2^n$.

Hinweis: $\log n$ steht hier für den Logarithmus von n zur Basis 2. Für den Logarithmus zur Basis a schreiben wir $\log_a n$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2: Asymptotisches Wachstum von Funktionen, Teil 2

Geben Sie für die folgenden Funktionen f_i jeweils möglichst einfache Funktionen g_i an, so dass $f_i \in \Theta(g_i)$ gilt.

- $5n^2 - 13n^{2,5} \cdot \log n^{2,5} - 8n^4 + 0,01n^5$
- $\prod_{i=0}^{\infty} n^{(2^{-i})}$
- $f_3(n) := n \cdot (\sqrt{n} + \log_3 n)$
- $f_4(n) := a \cdot n^{k_1} + b \cdot n^{k_2}$ für Konstanten $a, b, k_1, k_2 > 0$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion

Wir betrachten folgende rekursiv definierten Folgen.

a) Es sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $a_n = 2n - 1$.

b) Es sei $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = 3b_n + 1$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $b_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

c) Es sei $c_1 = 8$ und $c_{n+1} = 2c_n + n$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie:
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt die Gleichheit $c_n = 5 \cdot 2^n - n - 1$.

Aufgabe 4: Beweis der Euler-Formel

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit V und E als Mengen der Knoten bzw. der Kanten (Vertices bwz. Edges). Seien die Knoten Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G planar. Es bezeichne e die Anzahl der Kanten, v die Anzahl der Knoten, f die Anzahl der Flächen (faces) und c die Anzahl der Zusammenhangskomponenten (components). Zeigen Sie via Induktion, dass gilt

$$v - e + f = c + 1.$$