AlgGeo 6.1

4.1.4 Durchschnitt von Halbebenen

Gegeben n Geraden $G_i = \{(x,y) ;\ y = a_i x + b_i\}$

keine senkrecht $= \{Y = a_i X + b_i\}$

Gesucht Durchschnitt der oberen Halbebenen $H_i = \{Y \geq a_i X + b_i\}$

Klar: $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ = untere Kontur der G_i

mit Kor. 2.15: in Zeit $O(n \log n)$.

Jetzt: Dualität Punkt $\longleftrightarrow$ Gerade

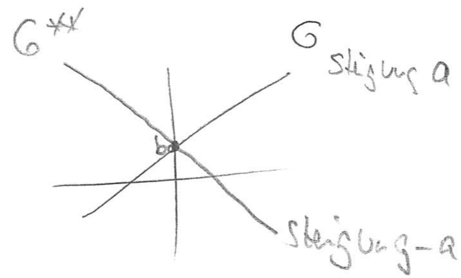
$$p = (a,b) \longmapsto \{Y = aX + b\} =: p^*$$
$$G^* = (-a, b) \longleftarrow\!\shortmid \{Y = aX + b\} = G$$

$G^{**}: Y = -aX + b$

$G: Y = aX + b$

Klar: p^{**} entsteht aus p durch Spiegelung an Y-Achse

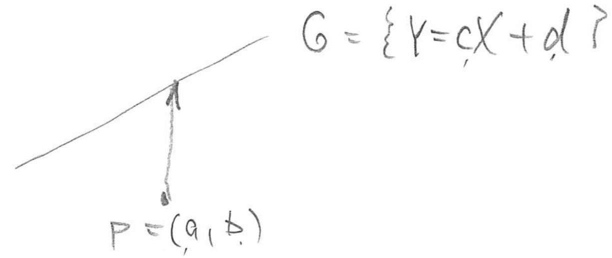
G^{**} " G "



Def: Gerichteter vertikaler Abstand von Punkt p zur Geraden G

$gva(p,G) :=$ Y-Koordinate des senkrechten Vektors von p zu G

$gva(p,G) = ca + d - b$



Alg Geo 6.2

<u>Lemma 4.8</u> $\quad \mathrm{gva}(p, G) = -\,\mathrm{gva}(G^*, p^*)$

<u>Bew:</u> Sei $p = (a,b) \qquad G = \{Y = cX + d\}$

$G^* = (-c, d) \qquad p^* = \{Y = aX + b\}$

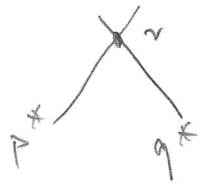
$$\mathrm{gva}(G^*, p^*) = a(-c) + b - d = -\,\mathrm{gva}(p, G). \qquad \square$$

<u>Folg:</u> $p \in G \iff G^* \in p^*$ Inzidenzerhalt

<u>Lemma 4.9</u> Seien $p = (a,b)$, $q = (c,d)$ mit $a \neq c$

$$p^* \cap q^* = \underbrace{\ell(p,q)}_{\text{Gerade durch } p \text{ und } q}{}^*$$

<u>Bew:</u>



$$\left.\begin{aligned} r \in p^* &\iff p^{**} \in r^* \\ r \in q^* &\iff q^{**} \in r^* \end{aligned}\right\} \iff r^* = \ell(p^{**}, q^{**})$$

$$\Updownarrow$$

$$r^{**} = \ell(p^{**}, q^{**})^*$$

$$\Updownarrow$$

** ist lediglich Spiegelung an Y-Achse $\longrightarrow$

$$r = \ell(p,q)^* \qquad \square$$

AlgGeo 6.3

<u>Theorem 4.10</u> Seien $G_1, \dots, G_n$ Geraden im $\mathbb{R}^2$, keine senkrecht, keine zwei parallel

Dann gilt: $G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt der unteren Kontur der G_i

$\Longleftrightarrow$ $G_i^{*} G_j^{*}$ ist untere Kante der konvexen Hülle der G_i^{*}

<u>Bew</u> Setze $p_i := G_i^{*}$

$p_i p_j$ Kante von $ch(\{p_1, \dots, p_n\})$

$\Longleftrightarrow$ alle übrigen p_k liegen oberhalb $l(p_i, p_j)$

$\Longleftrightarrow$ (Lemma 4.8) alle übrigen p_k^{*} verlaufen oberhalb des Punktes $l(p_i, p_j)^{*}$

$p_k^{*} = G_k^{**}$, $l(p_i, p_j)^{*} \overset{\text{Lemma 4.9}}{=} p_i^{*} \cap q_j^{*} = G_i^{**} \cap G_j^{**}$

$\Longleftrightarrow$ (Spiegelung!) alle übrigen G_k verlaufen oberhalb von $G_i \cap G_j$

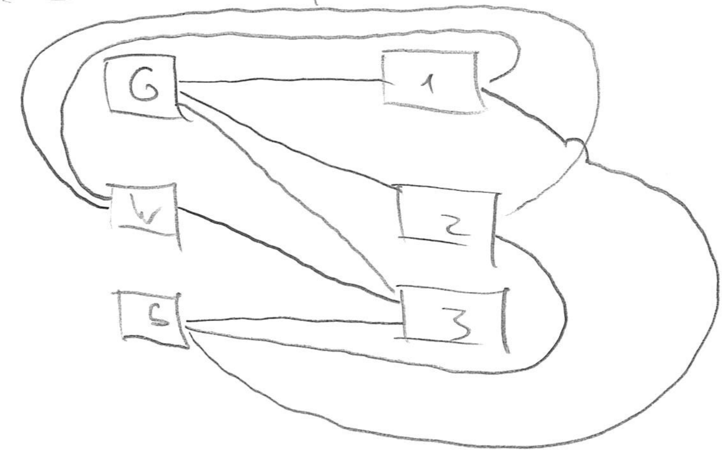
$\Longleftrightarrow$ $G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt der unteren Kontur der G_i. $\square$

<u>Kor 4.11</u> Durchschnitt von n beliebigen Halbebenen hat Komplexität $\Theta(n \log n)$ (durch Reduktion auf konvexe Hülle)

<u>Kor 4.12</u> Durchschnitt von n Halbebenen, deren Geraden nach Steigung sind: $O(n)$.

Alg Geo 6.4

1.2.2 Graphentheorie



Frage: Ist Kreuzung vermeidbar?

Def: Graph $G = (V, E)$ mit V: Menge der Knoten; endlich
E: Menge von Kanten
oft: $E \subseteq V \times V$
aber $e = (p, q)$ mit $p, q \in V$
impliziert Richtung

Geometrische Realisierung eines Graphen, z.B. im $\mathbb{R}^2$

f: Knoten $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv

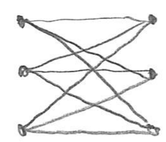
Kante $e = (p,q) \longmapsto$ einfacher Weg von $f(p)$ nach $f(q)$, der keinen anderen Wert $f(r)$ enthält

Geometrischer Graph: Graph (eingebettet) realisiert im $\mathbb{R}^2$

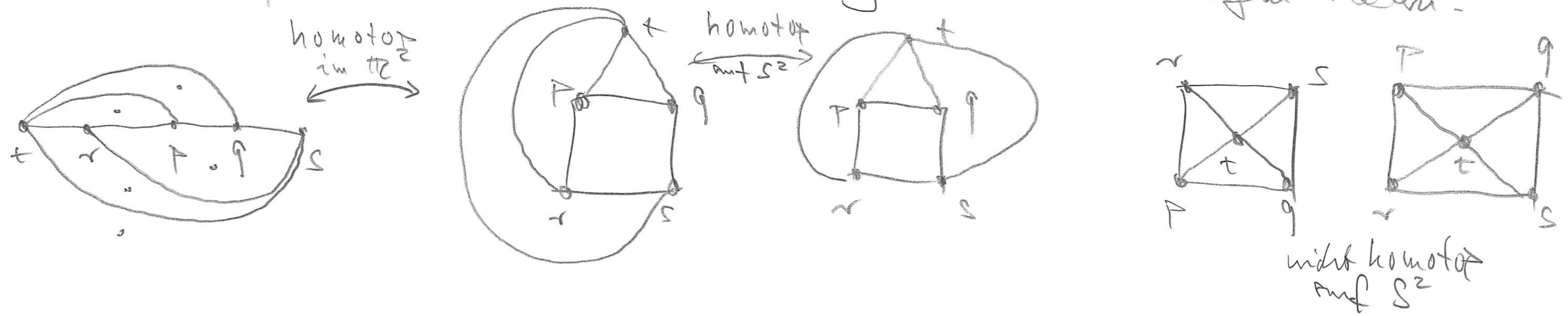
Def: Graph G heißt planar $:\Longleftrightarrow$ es gibt kreuzungsfreie geometrische Realisierung im $\mathbb{R}^2$

AlgGeo 6.5

Beispiel von oben: $K_{3,3}$: $V = \{g, w, s, 1, 2, 3\}$, $E = \{(g,1), (g,2), (g,3), \dots, (s,3)\}$



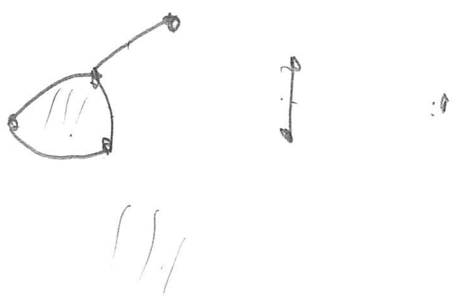
Abstrakter Graph kann unterschiedliche geom. Realisierungen haben:



<u>Theorem 1.1</u> (Euler-Formel) Sei G kreuzungsfreier geometrischer Graph in $\mathbb{R}^2$. Seien $v = \#$ Knoten, $e = \#$ Kanten, $f = \#$ Flächen, $c = \#$ Zusammenhangskomp.

Dann $v - e + f = c + 1$ ⌊ Zshgkp von $\mathbb{R}^2 \setminus G$

Bsp:



$v - e + f \overset{?}{=} c + 1$

$7 \quad 5 \quad 2 \qquad 3$

Alg Geo 6.6

Beweis durch Induktion über e:

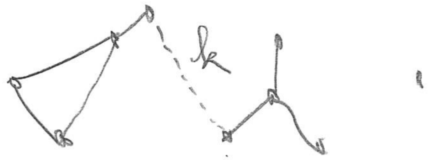
$e = 0$

n Punkte

$$\underset{n}{v} - \underset{0}{e} + \underset{1}{f} \overset{?}{=} \underset{n}{c} + 1 \quad ✓$$

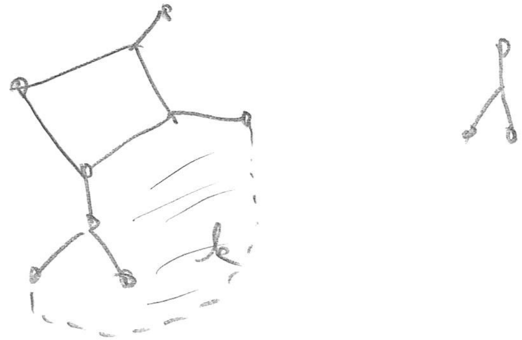
Sei jetzt kreuzungsfreier plan. Graph mit $e+1$ Kanten gegeben.
Entferne Kante k: Nach IndVor gilt jetzt Euler.
Jetzt füge Kante k ein:

2 Fälle (i)



vorher: $v - \underset{+1}{e} + f = \underset{-1}{c} + 1 \quad ✓$

(ii)



vorher: $v - \underset{+1}{e} + \underset{+1}{f} = c + 1 \quad ✓$

(Jordan!)

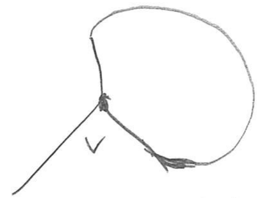
$\square$

Folgerung Jede kreuzungsfreie Einbettung eines planaren Graphen hat dieselbe Anzahl von Flächen.

AlgGeo 6.7

Def: Grad grad(v) von Knoten v = Anzahl der inzidenten Kanten

grad(v) = 3



grad(v) = 3

<u>Im folgenden</u> G kreuzungsfreier geom. Graph im $\mathbb{R}^2$, jeder Knoten v hat Grad ≥ 3.

Folgerung $3v \leq 2e$

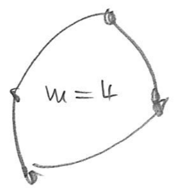
$\Rightarrow$

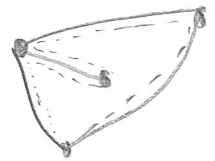
$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\underset{\geq \frac{2}{3}e}{\underbrace{v}} - e + f}_{\geq -\frac{1}{3}e + f} = c+1 \\[2ex] \underbrace{v - \underset{\leq \frac{3}{2}v}{\underbrace{e}} + f}_{\geq -\frac{1}{2}v + f} = c+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e \leq 3(f-c-1) \Rightarrow e < 3f \\[4ex] \Rightarrow v \leq 2(f-c-1) \Rightarrow v < 2f \end{array}$$

AlgGeo 6.8

<u>Folgerung</u>: Die durchschnittliche Kantenzahl pro Fläche ist < 6

Sei $m_i := \#$ Kanten auf Rand der i-ten Fläche

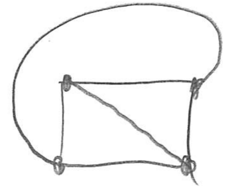




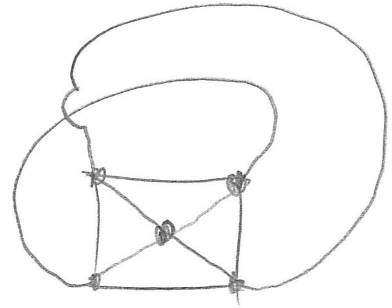
$m = 5$

<u>Bew.</u>: $$\sum_{i=1}^{f} m_i \leq 2e < 6f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{f} m_i < 6 .$$

K_n :  ,  ,  , 

K_4



<u>Theorem</u> (Ü 1.5) K_5 ist nicht planar.

<u>Beweis</u> indirekt: Sonst würde nach Euler für kreuzungsfreie Darst. gelten:

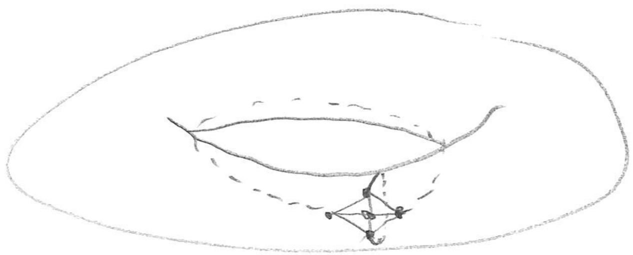
$$\underset{5}{v} - \underset{\substack{\binom{5}{2} \\ \| \\ 10}}{e} + f = \underset{1}{c} + 1 \quad \Rightarrow f = 7$$

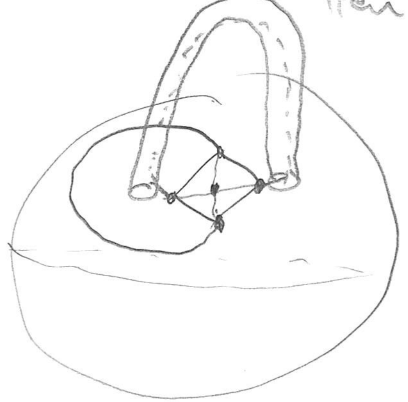
AlgGeo 6.9

K_5 enthält weder  noch  $\Rightarrow$ jedes $m_i \geq 3$

$$21 = 3 \cdot f \leq \sum_{i=1}^{f} \underbrace{m_i}_{\geq 3} \leq 2e = 20 \quad ↯$$

Man kann K_5 kreuzungsfrei auf Torus einbetten:



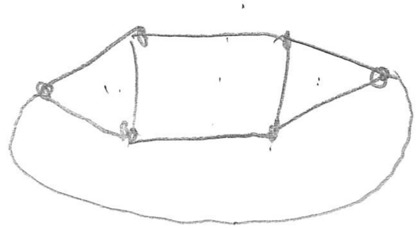


Henkel

<u>Theorem</u> (Ü1.4) $K_{3,3}$ ist nicht planar.

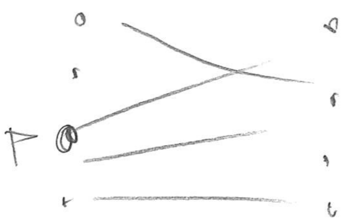
<u>Beweis</u> indirekt: sonst $\underset{6}{v} - \underset{9}{e} + f = \underset{1}{c} + 1 \Rightarrow f = 5$

solche Graphen gibt es:



AlgGeo 6.10

$K_{3,3}$ bipartit.



alle Zykel haben gerade Länge

$\Rightarrow$ alle $m_i \geq 4$

$$\Rightarrow 20 = 4 \cdot f \leq \sum_{i=1}^{f} m_i \leq 2e = 18 \quad ↯$$

Theorem (Kuratowski) G planar $\Leftrightarrow$ G enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Teilgraphen (mod —•—)

Allgemein: Man kann jeden endlichen Graphen kreuzungsfrei auf Kugel mit g Henkeln einbetten

min g : Geschlecht des Graphen

Berechnung ist NP-hart

Aber: Planaritätstest ($g \stackrel{?}{=} 0$) in Zeit $O(n)$.