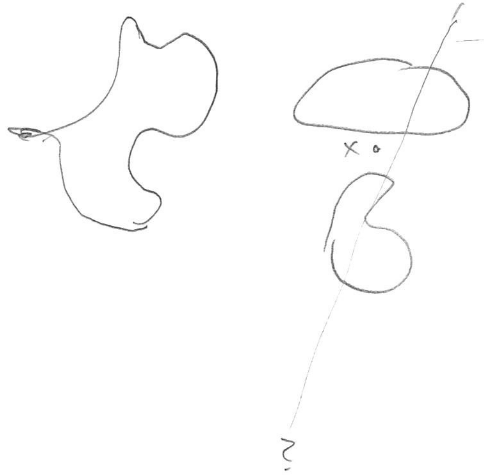
AlgGeo 3.1

Theorem 1.5



$W \subseteq \mathbb{R}^d$ mit m Zusammenhangskomponenten

$\Rightarrow$ Elementtest $x \overset{?}{\in} W$ erfordert

$\geq \log m$ viele Tests

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d \overset{?}{<} 0$$

Anwendungen

Problem ε-closeness

Gegeben: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

Frage: Gibt $i \neq j$: $|x_i - x_j| < \varepsilon$?

Korollar 1.6 ε-closeness hat Komplexität $\Theta(n \log n)$ im linearen Modell

Bew: $O(n \log n)$: Sortieren

$\Omega(n \log n)$: $W := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \forall i \neq j : |x_i - x_j| \geq \varepsilon\}$

= die Tupel mit Antwort "nein"

für jede Permutation π sei $W_\pi := \{(x_1, \dots, x_n) \in W;\ x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < \dots < x_{\pi(n)}\}$

Beh: Die W_π sind die Zshgkp von W!

Bew (i) jedes W_π ist wegzshgd

(ii) $\pi \neq \sigma \Rightarrow$ es gibt <u>in</u> W keinen Weg von W_π nach W_σ

AlgGeo 3.2

(i) Seien $p, q \in W_\pi$. Angenommen $p_i \geq p_j + \varepsilon$

$\Rightarrow$ $q_i \geq q_j + \varepsilon$, weil p, q im selben W_π

$\Rightarrow \forall a \in [0,1] : (1-a)p_i + aq_i \geq (1-a)(p_j+\varepsilon) + a(q_j+\varepsilon) = (1-a)p_j + aq_j + \varepsilon$

$\underset{i,j \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ Liniensegment $\{(1-a)p + aq \; ; \; a \in [0,1]\} \subset W_\pi$

$\Rightarrow$ W_π konvex, also wegzshgd.

(ii) Seien $\pi \neq \delta$ zwei Permutationen, $p \in W_\pi$, $q \in W_\delta$

wir zeigen: es gibt keinen Weg von p nach q in W

indirekt: Angenommen, es gäbe $f : [0,1] \longrightarrow W$ stetig mit $f(0) = p$, $f(1) = q$

$\pi \neq \delta \Rightarrow \exists \; i \neq j : p_i < p_j$ und $q_i > q_j$

schreibe $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a))$ mit f_i stetig

$$\left.\begin{array}{l} f_i(0) - f_j(0) = p_i - p_j < 0 \\ f_i(1) - f_j(1) = q_i - q_j > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Zwischenwert-Satz}}{\Longrightarrow} \exists a \in [0,1] : f_i(a) - f_j(a) = 0$$

$\lightning \; f(a) \notin W$. $\boxed{1.6}$

☺

Kor. 1.10 Closest Pair hat Komplexität $\Theta(n \log n)$ im linearen Modell

Bew: $O(n \log n)$: Algorithmus mit Sweep

$\Omega(n \log n)$: wegen ε-closeness: $x_i \longmapsto (x_i, 0)$ Hätte man schnell Closest Pair, wüsste man, ob Abstand $< \varepsilon$ auftritt.

AlgGeo 3.3

Ganz ähnlich wie ε-closeness:

Problem Element Uniqueness:

Gegeben: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ Frage Gibt es $i \neq j$: $x_i = x_j$?

Kor 1.7 Element Uniqueness hat ebenfalls Komplexität $\Theta(n \log n)$

Kor 1.8 Auch im linearen Modell hat Sortieren Komplexität $\Theta(n \log n)$.

Frage Warum nur lineare Tests $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d \overset{?}{<} 0$ erlauben?

Warum nicht $c_1 x_1^{17} x_2^2 - c_2 x_1 x_3^5 + \dots + d \overset{?}{<} 0$?

allgemein: Test $h(x_1, \dots, x_n) \overset{?}{<} 0$, wobei h Polynom in Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit Grad $\leq d$

(1) Beweis von unteren Schranken wird schwieriger!

Denn: Die Mengen A_b (alles Inputs, die in Blatt b terminieren) brauchen nicht zusammenhängend zu sein

Aber: (Milnor, Thom):

$\{(x_1, \dots, x_n) ;\ h_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ und $h_2(x_1, \dots, x_n) = 0$ und ... und $h_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$

hat $\leq d(2d-1)^{n-1}$, falls h_i Polynome vom Grad $\leq d$ sind

AlgGeo 3.4

(ii) Auswertung von $\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ ergibt:

$= 0 \iff$ Antwort auf Element Uniqueness ist "ja"

d.h. $\exists\, i \neq j : x_i = x_j$

Müssen Kosten für die Auswertung von $\prod (x_i - x_j)$ in unser Kostenmodell integrieren.

Geht durch Zerlegung in Elementaroperationen $+, \cdot, -, /$

$\rightsquigarrow$ Algebraisches Modell. Erfreulich: unsere unteren Schranken gelten auch dort (Ben-Or.)

Kleiner Sprung: <u>4.1 Konvexe Hüllen ebener Punktmengen</u>

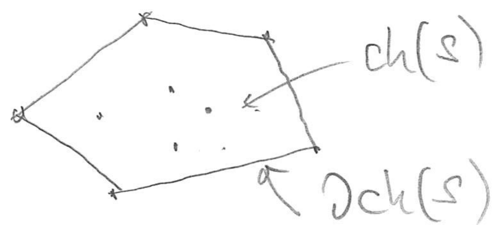
Def: $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Konvexe Hülle $ch(A) := \bigcap_{\substack{K \supseteq A \\ K \text{ konvex}}} K$

Klar: $\mathbb{R}^d$ konvex $\Rightarrow$ für jedes A existiert konvexe Obermenge

$ch(\emptyset) = \emptyset$

$ch(A)$ ist die bezüglich „$\subseteq$" kleinste konvexe Obermenge von A.

Hier: $A = S$ Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^2$

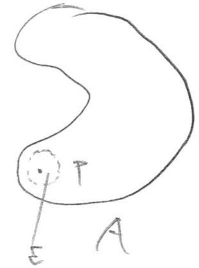


AlgGeo 3.5

Def Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$

$p \in A$ heißt innerer Punkt von A $:\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(p) \subseteq A$

$$U_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{R}^n ; |z-p| < \varepsilon\}$$



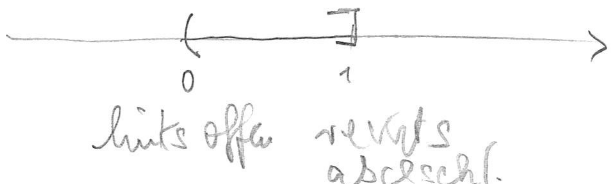
A heißt offen $:\Longleftrightarrow$ jedes $p \in A$ ist innerer Punkt

A abgeschlossen $:\Longleftrightarrow$ A^c offen

$p \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von A $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(p) \cap A \neq \emptyset$

$U_\varepsilon(p) \cap A^c \neq \emptyset$

Beispiel:



Intervall $(0,1]$

$= \{x \in \mathbb{R} ; \ 0 < x \leq 1\}$

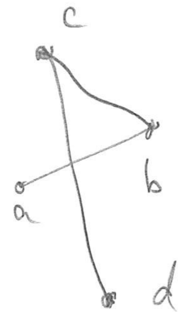
$\partial (0,1] = \{0,1\}$.

[∂ : in LATEX mit \partial im MathMode]

Frage: S Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^2$: sieht ch(S) wirklich so aus wie im Bildchen ?

AlgGeo 3.6

Def: polygonale Kette: endliche Folge von aneinander grenzenden Liniensegmenten ab, bc, cd ..

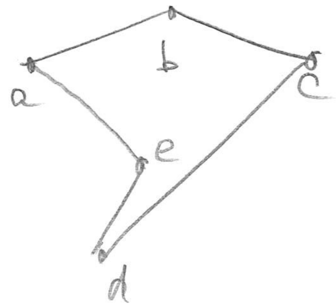


(einfaches) Polygon : inneres Gebiet einer einfachen, geschlossenen Polygonalen Kette

einfach: keine Selbstschnitte

geschlossen: Anfangspunkt = Endpunkt

inneres Gebiet: Spezialfall des Jordansche Kurvensatzes



Theorem (Jordan)

Sei C eine einfache, geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten

beschränkt: inneres Gebiet

unbeschränkt: äußeres Gebiet

AlgGeo 3.7

Lemma 4.2 S Menge von n Punkten in $\mathbb{R}^2$.

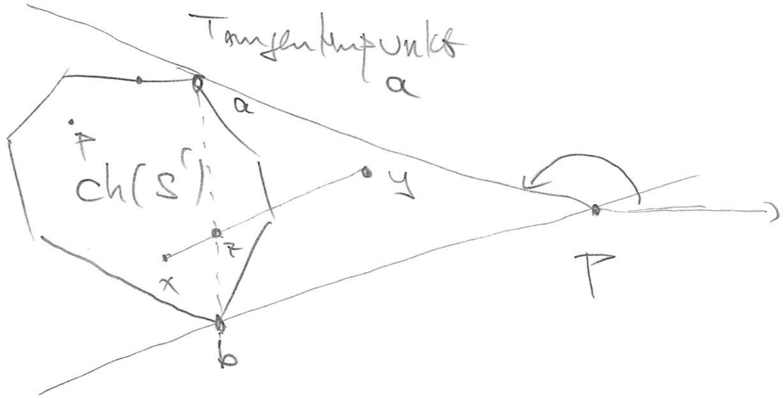
$\Rightarrow$ ch(S) konvexes Polygon mit Ecken in S

Beweis Induktion über n: $n=1$: ✓

$n=2$:

$n \geq 3$: Sei $p \in S$, $S' := S \setminus \{p\}$

nach Ind.-Vor.: ch(S') ein konvexes Polygon mit Ecken in S'



1. Fall $p \in ch(S')$
$\Rightarrow ch(S) = ch(S')$

2. Fall $p \notin ch(S')$

Beh: $ch(S) = ch(S') \cup tria(a,b,p)$

Bew: $\supseteq$: jede konvexe Obermenge von S enthält ch(S') und tria(a,b,p)

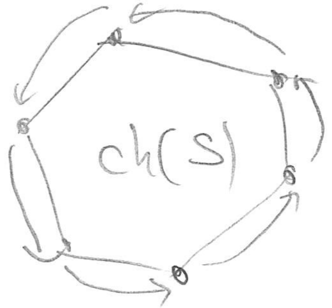
$\subseteq$: zeige: $\underset{\substack{\cup\\ x}}{ch(S')} \cup \underset{\substack{\cup\\ y}}{tria(a,b,p)}$ ist konvex

sei $z := xy \cap ab$: $\left.\begin{array}{l} xz \subset ch(S') \\ zy \subset tria(a,b,p)\end{array}\right\} \Rightarrow xy \subset$ Vereinigung

|L.4.2|

AlgGeo 3.8

Jetzt: ch(S) berechnen (d.h. die Ecken von $\partial ch(S)$ in Reihenfolge gegen Uhrzeigersinn berechnen)

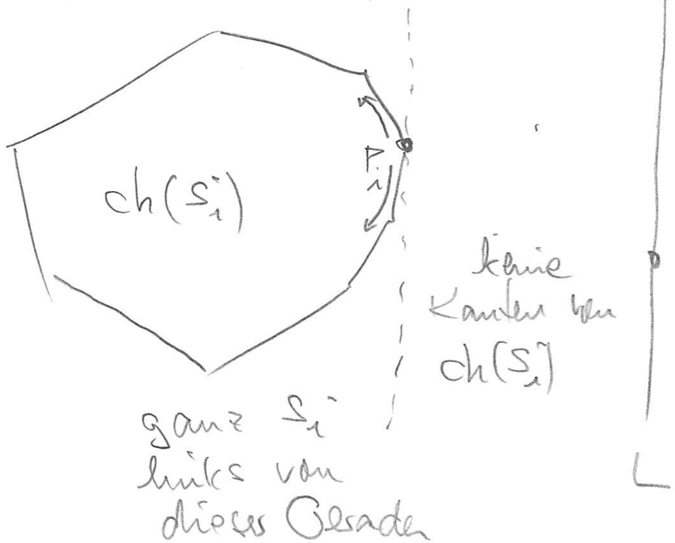


Idee: Sweep nach Kochrezept: betrachte die n Punkte in aufsteigender x-Reihenfolge, unterhalte dabei konvexe Hülle der schon betrachteten Punkte

1.) Sortiere S nach x-Koordinaten: $p_1, p_2, \dots, p_n$

sweep line L stößt gerade auf p_{i+1}: Ereignis

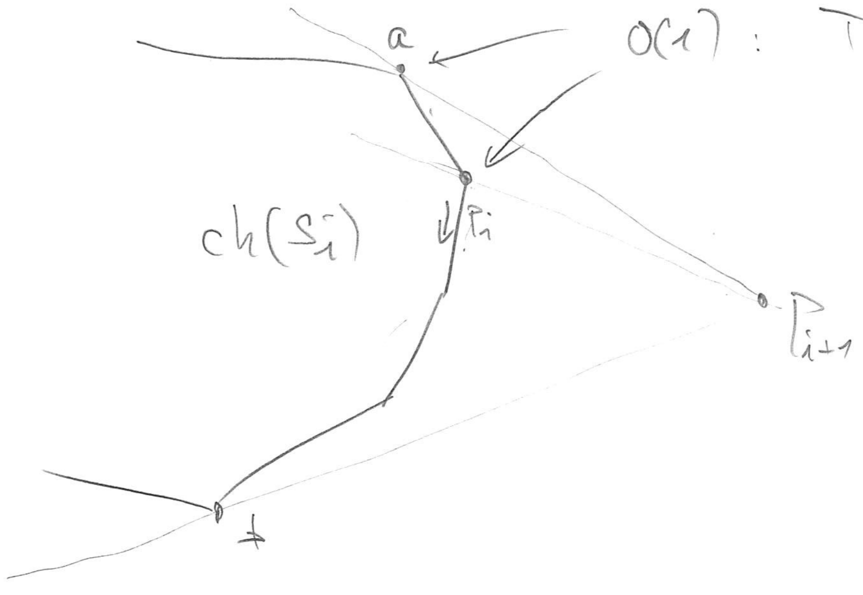
$S_i := \{p_1, \dots, p_i\}$



$\overline{p_i p_{i+1}} \cap ch(S_i) = \{p_i\}$

suche von p_i aus $\partial ch(S_i)$ nach Tangentenpunkten a, b ab

AlgGeo 3.9



O(1): Test, ob Tangentenpunkt erreicht:

Kanten $a p_{i+1}$, $b p_{i+1}$ zu $\partial ch(S_i)$ hinzufügen

das p_{i+1} zugewandte Randstück von $ch(S_i)$ zwischen a und b entfernen

Algorithmus korrekt ✓

Laufzeit?

Sortieren: $O(n \log n)$

Suche nach Tangentenpunkten: $\leq 2 \cdot n + \underbrace{\text{vergeblich besuchte Eckpunkte}}$

die Kosten "amortisieren" sich: $O(n)$

<u>Theorem 4.7</u> Sei S Menge von n Punkten im $\mathbb{R}^2$, nach einer Koordinate sortiert. Dann kann man $ch(S)$ in Zeit $O(n)$ berechnen.