AlgGeo 1.1

Buch: Algorithmic Geometrie, RK
2. Auflage
+ einzelne Abschnitte der Vorlesung

Sweep: 2.2.3 : Bsp: ① Maximum von n Zahlen

$-3 \quad 2 \quad -1 \quad 5 \mid 11 \quad -20$

$\longrightarrow$ MaxSoFar

② Aktienkurse $\quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad \underbrace{5 \quad -2 \quad -1 \quad 8}_{\text{MaxSoFar } 10} \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad -9 \quad \underbrace{3 \quad -1 \quad 3 \quad -4 \quad 8}_{9} \mid ?$

Array A
tägliche Kursschwankungen

Max EndingHere

gesucht: maximale Teilsumme konsekutiver Felder

$$\max\left(\max_{1 \le i \le k \le n} \sum_{j=i}^{k} A[j],\ 0\right)$$

einfacher Ansatz

```
MaxSoFar := 0
for i := 1 to n
  for k := i to n
    sum := 0
    for j := i to k
      sum := sum + A[j]
    MaxSoFar := max(MaxSoFar, sum)
```

Laufzeit n^3

besseres Ansatz: Summe fortschreiben

```
MaxSoFar := 0
for i := 1 to n
    sum := 0
    for k := i to n
        sum := sum + A[k]
        MaxSoFar := max(MaxSoFar, sum)
```

Laufzeit n^2

Divide & Conquer: Laufzeit $n \log n$

noch besser: Sweep: zur Bestimmung von Eigenschaften von Objekten
durchlaufe Objekte von links nach rechts
~~st~~ unterhalte die Eigenschaft der bisher besuchten Objekte
stelle fest, welche Ereignisse die Eigenschaft verändern
und was zu tun ist, um sie wiederherzustellen

Kochrezept

☹ Müssen nicht nur MaxSoFar, sondern auch MaxEndingHere unterhalten

😐 wie kann sich MaxEndingHere verändern?

$[\underbrace{\underbrace{3 \ -1 \ 3 \ -4 \ 8}_{9} \ | \ -7}_{2}$ ↑ bleibt

$[\underbrace{3 \ -1 \ \underbrace{3 \ -4 \ 8}_{9} \ | \ 2}_{11}]$

AlgGeo 1.3 $[\underbrace{3 \quad -1 \quad 3 \quad -4 \quad 8}_{9} \mid -10$ $\qquad$ $3 \quad -1 \quad 3 \quad -4 \quad 8 \quad -10 \quad [$ $\qquad$ c

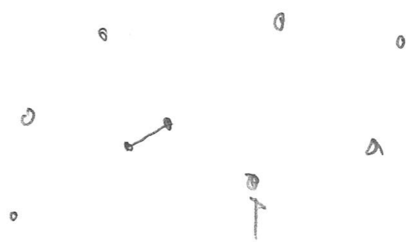
MaxEndingHere := 0

<u>optimal</u> $\qquad$ $O(n)$

```
MaxSoFar := 0
MaxEndingHere := 0
for i := 1 to n
    MaxEndingHere := max(MaxEndingHere + A[i], 0)
    MaxSoFar      := max(MaxSoFar, MaxEndingHere)
```

John Bentley: Programming Pearls

<u>Sweep in 2D</u> $\qquad$ Closest Pair Problem



Gegeben: n Punkte in der Ebene

Gesucht: kleinster Abstand zwischen zwei Punkte,

Algorithmus: kennt Koordinaten $(x_p, y_p) = p$

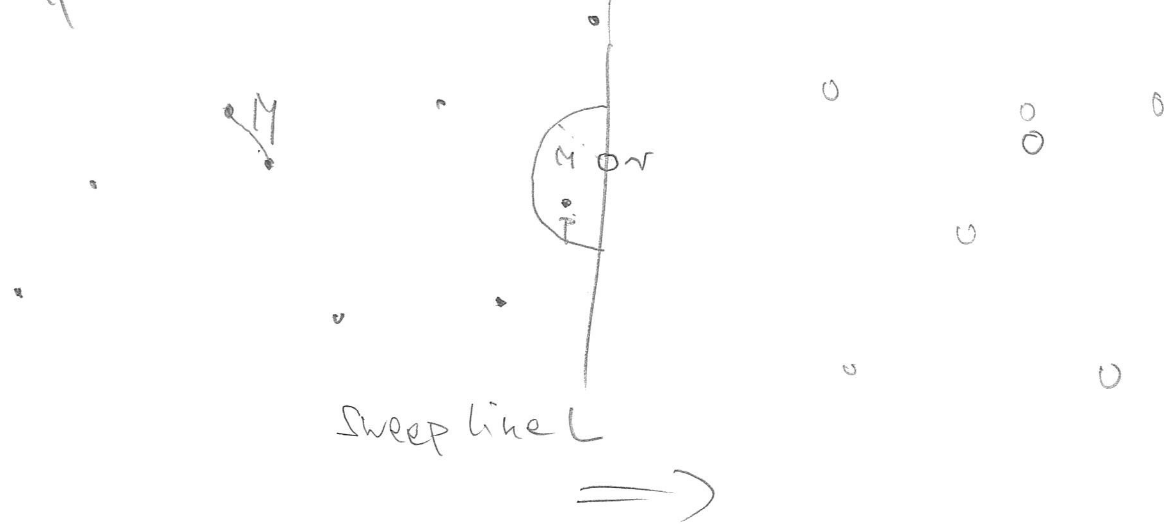
kann euklidische Abstände ausrechnen

$$|p-q| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

naiv: alle $\binom{n}{2}$ Abstände berechnen, Minimum bestimmen $\quad | \quad \binom{n}{2} \sim n^2$

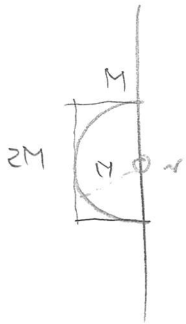
AlgGeo 1.4 d

Sweep? Objekte: Punkte

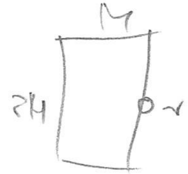


Beobachtung: Wenn neuer Punkt r von Sweepline L getroffen wird (Event!), kann er nur mit Partnerpunkten p im linken Halbkreis um r mit Radius M das alte Minimum M unterbieten

☹ Kreisanfragen sind schwierig:



Idee: Vergröberung!
statt Halbkreis: Box

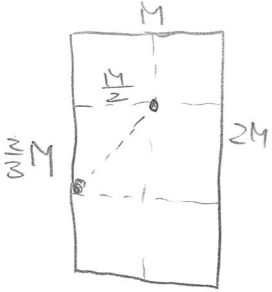


teste alle Punkte p in Box,
ob sie zu r Abstand < M haben

2 Probleme: (i) wieviele Punkte können in der Box liegen (Vermutung: 6)
(ii) wie findet man sie?

AlgGeo 1.5 e

zu (i): Lemma: In einer Box



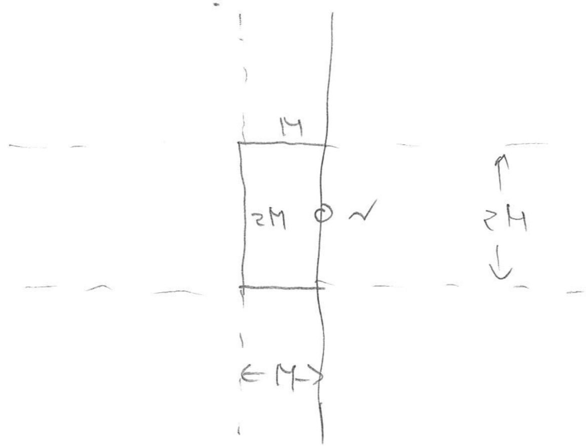
können maximal 6 Punkte mit paarweisem Abstand $\geq M$ liegen.

Bew: In jeder Minibox kann höchstens 1 Punkt liegen.
Denn: 2 Punkte in einer Minibox haben höchstens den Abstand

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}M\right)^2 + \left(\frac{M}{2}\right)^2} = \underbrace{\sqrt{\frac{16+9}{36}}}_{\frac{5}{6}}\, M < M.$$

$\boxed{\text{Lemma}}$

zu (ii): Wie berichtet man die Punkte in der Box?



Idee: Unterhalte alle Punkte im Streifen der Breite M links von Sweepline L, nach y sortiert.
Wenn L auf neuen Punkt $r = (x_r, y_r)$ stößt:
berichte alle Punkte p im Streifen mit y-Koordinate $y_r - M \leq y_p \leq y_r + M$.

Benötigen Datenstruktur ~~mit~~ y-Werte für folgende Operationen:

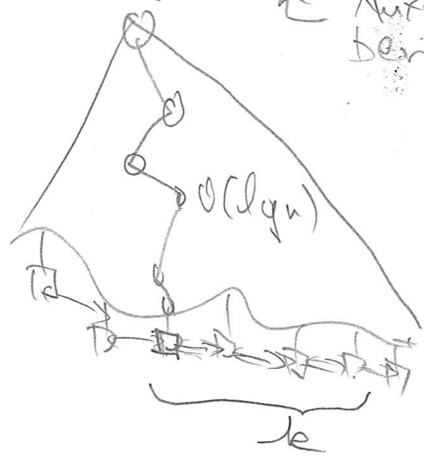
Einfügen, Entfernen $O(\log n)$

Berichten aller Werte im Intervall $[y_1, y_2]$

Black Box:
AVL-Bäume

$O(\log n + k)$

← Anzahl der berichteten Punkte



Algorithmus für Closest Pair Problem im $\mathbb{R}^2$

Sortiere Punkte nach x-Koord. $O(n \log n)$

bewege Sweepline L von links nach rechts

wenn neuer Punkt r getroffen:

entferne alle Punkte q mit $x_q < y_r - M$ aus Streifen $\boxed{\text{insgesamt } O(n \log n)}$

finde alle Punkte p im Streifen mit $y_r - M \le y_p \le y_r + M$ $O(\log n + \underbrace{k}_{\le 6})$

teste, ob für ein solches p gilt: $O(1)$

$|p - r| < M$

falls ja: $M := |p - r|$

füge r in Streifen ein: $O(\log n)$

Sweepline L hält n mal an

<u>Theorem 2.4</u> Der dichteste Abstand von n Punkten im $\mathbb{R}^2$ läßt sich in Zeit $O(n \log n)$ bestimmen.

<u>Fragen:</u> Was passiert hier:

$\Rightarrow$

1. <u>Möglichkeit</u>
   Algorithmus anpassen
2. <u>Möglichkeit</u>
   „Allgemeine Lage" verlangen