Grundlagen der alg. Geometrie
Sommersemester 2019

Abgabe: optional in Übung
Besprechung: 30.04. - 02.05.

Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Komplexität von Polygon-Schnitten

Wenn man zwei einfache Polygone P und Q mit m bzw. n Kanten miteinander schneidet, wieviele Zusammenhangskomponenten, Eckpunkte und Kanten kann dann der Schnitt maximal haben? Geben Sie alle drei Werte in Θ-Notation an und begründen Sie, warum die jeweilige Maximalzahl keine größere oder kleinere Größenordnung haben kann!

Aufgabe 4.2: Gleichmäßiges Teilen von Polygonen

In dieser Aufgabe soll das *Polygon Cutting Theorem* bewiesen werden. Es besagt, dass in jedem einfachen Polygon mit n Kanten eine Diagonale gefunden werden kann, die das Polygon in zwei Teile zerlegt, welche beide aus höchstens $\frac{2n}{3}$ vielen Kanten bestehen. Die Diagonale wird dabei nicht als Kante der sich ergebenden Teile mitgezählt.

a) Sei T ein Baum mit n Knoten, die alle Grad ≤ 3 besitzen. Durch das Entfernen einer Kante zerfällt T in zwei Teilbäume. Zeigen Sie, dass es möglich ist, eine Kante aus T zu entfernen, so dass beide entstehenden Teilbäume höchstens $\frac{2n+1}{3}$ viele Knoten enthalten.

b) Beweisen Sie das *Polygon Cutting Theorem*. Betrachten Sie dazu eine Triangulation des zu zerlegenden Polygons, den dualen Graphen dieser Triangulation und wenden Sie Aufgabenteil **a)** an.

Aufgabe 4.3: Jordanscher Kurvensatz für Polygone

Zeigen Sie den Jordan'schen Kurvensatz für Polygone:

Jedes einfache Polygon in der euklidischen Ebene teilt diese in genau zwei disjunkte Gebiete, deren gemeinsamer Rand das Polygon ist und die vereinigt mit dem Polygon die gesamte Ebene abdecken. Genau eines dieser Gebiete (ïnnen") ist beschränkt.

Tip: Nutzen Sie den Zwei-Ohren-Satz.

Aufgabe 4.4: Eindeutige Triangulationen

Zeigen Sie: Zu jeder ganzen Zahl $n \geq 3$ gibt es ein einfaches Polygon in der Ebene mit *genau* n Ecken und einer *eindeutigen* Triangulierung.