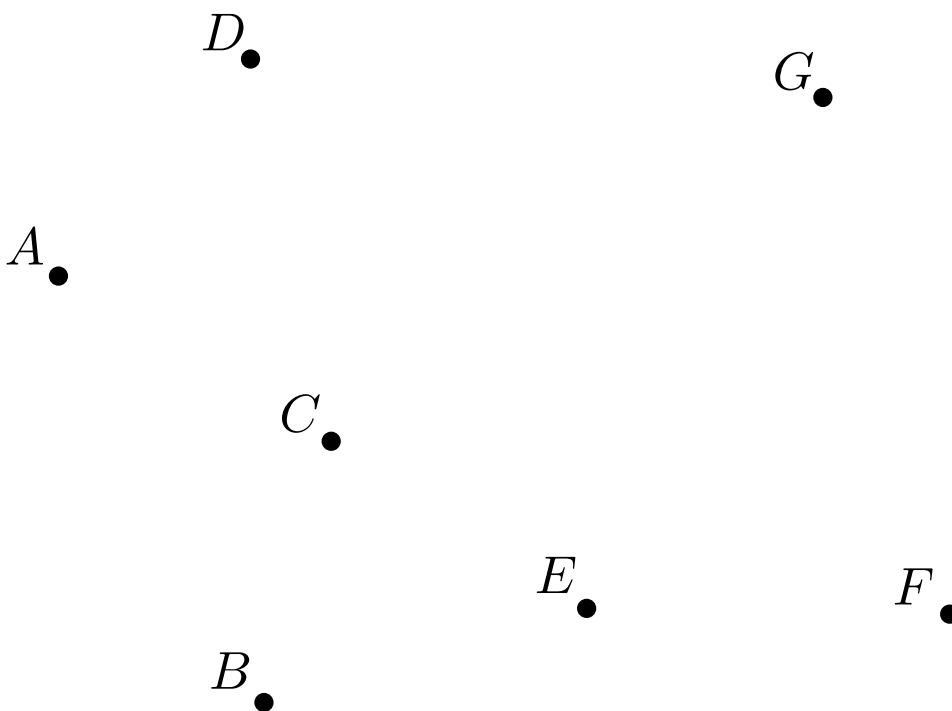


Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1: Voronoi-Diagramme und Delaunay-Triangulation

- Geben Sie das Voronoi-Diagramm, die Delaunay-Triangulierung und den minimalen Spannbaum der abgebildeten Punktmenge an. (Die Delaunay-Triangulierung ist der duale Graph des Voronoi-Diagramms!)
- Betrachten Sie das Voronoi-Diagramm der abgebildeten Punktmenge. Welche Voronoi-Regionen sind zu welchen benachbart, welche sind beschränkt bzw. unbeschränkt?



Aufgabe 10.2: Komplexität einzelner Voronoi-Regionen

Zeigen Sie, dass zu jedem $n > 3$ eine Menge von n Punkten in der Ebene existiert, so dass auf dem Rand einer Voronoi-Region $n - 1$ Knoten des Voronoi-Diagramms liegen.

Aufgabe 10.3: Komplexität Voronoi-Diagramme und Triangulationen

Gegeben seien n Punkte in allgemeiner Lage in der Ebene. Zeigen Sie:

1. Das Voronoi-Diagramm der n Punkte hat genau $2n - r - 2$ viele Knoten und $3n - r - 3$ viele Kanten, wobei r die Anzahl der Ecken auf der konvexen Hülle der n Punkte ist.
2. Jede Triangulation der n Punkte hat genau $3n - r - 3$ viele Kanten.
3. Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel einer Triangulation von Punkten in der Ebene an, bei dem jeder Knoten genau Grad 5 hat. Wieviele Punkte muss eine solche Triangulation mindestens besitzen? Wieviele Punkte muss die konvexe Hülle haben?

Aufgabe 10.4: Eigenschaften von Voronoi Diagrammen

Zeigen Sie:

Das Voronoi-Diagramm $VD(P)$ einer Punktmenge P hat folgende Eigenschaften:

- a) Ein Punkt q ist Knoten des Voronoi-Diagramms $VD(P)$ genau dann, wenn der größte leere Kreis $C_P(q)$ mit q als Mittelpunkt drei oder mehr Punkte aus P auf dem Rand enthält.
- b) Der Bisektor zwischen zwei Punkten p_i und p_j aus P trägt genau dann zu einer Kante von $VD(P)$ bei (d.h. $p_i p_j$ ist eine Kante in der Delaunay-Zerlegung), wenn ein Punkt q auf dem Bisektor existiert, so dass $C_P(q)$ sowohl p_i als auch p_j auf dem Rand enthält aber keinen anderen Punkt aus P weder im Innern noch auf dem Rand liegt.