Grundlagen der alg. Geometrie
Sommersemester 2018

Abgabe: optional in Übungen
Besprechung: 16.05. - 18.05.

Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1: Euler Formel auf Torus und Kugel (4 Punkte)

a) Gilt die Euler-Formel auch für Graphen, die kreuzungsfrei auf der Kugel eingebettet sind? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an und eine Stelle, an der die direkte Übertragung des Beweises aus der Vorlesung scheitert!

b) Gilt die Euler-Formel auch für Graphen, die kreuzungsfrei auf dem Torus eingebettet sind? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an und eine Stelle, an der die direkte Übertragung des Beweises aus der Vorlesung scheitert!

Aufgabe 4.2: Amortisierte Kosten Beispiel: Binärzähler (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Binärzähler, der in Einer-Inkrement-Zählschritten von 0 bis n hochzählt. Dabei treten pro Zählschritt unterschiedlich viele Überträge im Binärsystem auf. Ein Elementarschritt sei definiert als die Umschaltung genau eines Bits ('$0 \to 1$' oder '$1 \to 0$').

Zeigen Sie: Beim Hochzählen eines Binärzählers von 0 bis n braucht man *im Mittel* pro Zählschritt höchstens konstant viele Elementarschritte. Wie groß ist diese Konstante?

Aufgabe 4.3: Zerlegbare Anfragen (4 Punkte)

Die in der Vorlesung vorgestellte generische Dynamisierung setzt voraus, dass Anfragen an die Datenstruktur *zerlegbar* sind. Das heißt, wir verlangen, dass ein binärer Operator $\otimes$ existiert, sodass für jede Binärdarstellung $V_1, ..., V_{\lfloor \log n \rfloor}$ von V gilt:

$$\text{query}(V, q) = \otimes \left(\text{query}(V_1, q), \ldots \otimes \left(\text{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor - 1}, q), \text{query}(V_{\lfloor \log n \rfloor}, q)\right) \ldots\right)$$

wobei $\otimes$ in konstanter Zeit ausgewertet werden kann.

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Zerlegbarkeit der folgenden vier Anfragetypen:

Lineare Programmierung: Ist q eine zulässige Lösung? Das heißt, erfüllt $q \in \mathbb{R}^n$ die gespeicherten linearen Nebenbedingungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}q_1 & + \ldots & + a_{1n}q_n & \leq b_1 \\ a_{21}q_1 & + \ldots & + a_{2n}q_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}q_1 & + \ldots & + a_{mn}q_n & \leq b_m \end{array}$$

Extrempunktberechnung: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Welcher gespeicherte Punkt maximiert f?

Konvexe Hülle – Elementtest: Liegt q innerhalb der konvexen Hülle der gespeicherten Punkte?

Konvexe Hülle – Lokale Sicht: In welchem kleinsten Winkelfeld mit Scheitel q liegt die konvexe Hülle der gespeicherten Punkte?