

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

1+1 Punkte

- Geben Sie eine zusätzliche Bedingung für die Potentialfunktion in Theorem 2.9 an, aus welcher strikte Kompetitivität folgt.
- Folgern Sie, für welche Start-Konfigurationen der Server der DC-Algorithmus auf Bäumen strikt k -kompetitiv ist.

Aufgabe 6.2

2+2+2 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit positiven Kantengewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

- Zeigen Sie: Jeder Spannbaum T liefert eine dominante Metrik d_T für die durch G induzierte Metrik d .
- Sei s_T der Streckungsfaktor einer Baummetrik d_T gegenüber der induzierten Metrik d . Geben Sie einen $s_T \cdot k$ -kompetitiven Algorithmus für das k -Server Problem auf G an (und beweisen Sie dessen kompetitiven Faktor).
- Sei $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G . Zeigen Sie, dass $s_T \leq N - 1$ gilt, wobei $N = |V|$ gilt.

Aufgabe 6.3

3+3 Punkte

Sei $n = a^2$ für eine natürliche Zahl a . Wir betrachten den metrischen Raum $\mathcal{M} = (M, d)$ mit $M = \{1, \dots, a\} \times \{1, \dots, a\}$ und $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

- Geben Sie einen $k \cdot (a + 1)$ -kompetitiven deterministischen Online-Algorithmus für das k -Server-Problem auf dem metrischen Raum \mathcal{M} an.
- Geben Sie einen $k \cdot (\frac{a}{2} + 1)$ -kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus für das k -Server-Problem auf dem metrischen Raum \mathcal{M} an.

Aufgabe 6.4

3+3 Punkte

Wir betrachten metrische Räume $\mathcal{M} = (M, d)$, für die $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge ist und die Metrik d folgende Eigenschaft besitzt: Für je drei Punkte $x, y, r \in M$, die auf einer Geraden liegen, wobei y zwischen x und r liegt, und einen beliebigen Punkt $p \in M$ folgt aus $d(x, p) \leq d(r, p)$, dass auch $d(y, p) \leq d(r, p)$ gilt.

- Zeigen Sie, dass der Raum \mathbb{R}^n , ausgestattet mit dem euklidischen Abstand, ein solcher Raum ist.
- Zeigen Sie, dass der $SC_{\frac{1}{2}}$ -Algorithmus 3-kompetitiv für das 2-Server-Problem in jedem solchen metrischen Raum \mathcal{M} ist.