Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Online-Algorithmen
Sommersemester 2016
Abgabe: 10.05.2016, 14:00 Uhr

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

6 Punkte

Sei A ein Algorithmus für das k-Server Problem auf einem beliebigen metrischen Raum $\mathcal{M} = (M, d)$. Zeigen Sie, dass es einen faulen Algorithmus B gibt, sodass $w_B(\sigma) \leq w_A(\sigma)$ für alle Eingaben σ gilt.

Aufgabe 4.2

6 Punkte

Wir betrachten die Reduktion des k-Server-Problems auf das Min-Cost-Flow-Problem. Zeigen Sie, dass der maximale Fluss f mit minimalen Kosten alle Kanten der Form (σ_j, σ'_j) voll auslastet.

Hinweis: Sie können annehmen, dass f ganzzahlig ist.

Aufgabe 4.3

6 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende ungerichtete gewichtete Graph mit positiven Kantengewichten eine Metrik auf seinen Knoten induziert. Zeigen Sie umgekehrt, dass jeder endliche metrische Raum durch einen zusammenhängenden ungerichteten gewichteten Graphen mit positiven Kantengewichten dargestellt werden kann.

(b) Sei G ein Graph mit $k+1$ Knoten, der als Kantenmenge die Kanten $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k+1}, v_1)\}$ besitzt, mit einer beliebigen Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$. Wir können nun den Algorithmus A von Übungsblatt 2 wie folgt auf G übertragen: Erfolgt eine Anfrage an einem Knoten v_i, an dem sich kein Server befindet, so bewegt sich der Server von Knoten v_{i-1} zu der Anfrage (im Falle $i = 1$ bewegt sich der Server von v_{k+1} zu v_1). Welchen kompetitiven Faktor weist dieser Algorithmus auf?

Aufgabe 4.4

6 Punkte

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Metrik $d\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit

$$\delta(G) = \frac{\max_{u \neq v} d(u, v)}{\min_{u \neq v} d(u, v)}$$

bezeichnen wir die *Aspect Ratio* von G. Sei A ein Algorithmus für das Paging-Problem mit kompetitivem Faktor k. Zeigen Sie, dass wir den Algorithmus auf das k-Server Problem auf G übertragen können und dabei einen kompetitiven Faktor von $k \cdot \delta(G)$ erhalten.