Zusammenfassung Untere Schranken/Konturen

Elmar Langetepe
University of Bonn

ϵ-Closeness, lineares Modell

Korollar 1.6 Das Problem ϵ-Closeness hat im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

- Elementtest $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in W \| x_i - x_j| \geq \epsilon$ für $i \neq j\}$
- Zusammenhangskomponenten
  $W_\pi = \{(x_1, \ldots, x_n) \in W | x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < \cdots < x_{\pi(n)}\}$,
  $W = \bigcup_\pi W_\pi$
- Elementtest für W mit $|W| = n!$, genauso Element-Uniqueness

Korollar 1.7 Das Problem Element-Uniqueness hat im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Reduktionen

- ϵ-Closeness $\leq_p$ Sortieren
- ϵ-Closeness $\leq_p$ All-Nearest-Neighbors, $x_i \Longrightarrow (x_i, 0, \ldots, 0)$
- ϵ-Closeness $\leq_p$ Closest-Pair (genauso)

Korollar 1.8 Sortieren hat auch im linearen Modell eine Zeitkomplexität von $\Theta(n \log n)$.

Korollar 1.9 Für jeden Punkt einer n elementigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ seinen nächsten Nachbarn zu finden, hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$.

Korollar 1.10 Das dichteste Punktepaar (closest-pair) einer n elementigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ zu finden, hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$. (siehe auch Korollar 2.1/2.5)

Nachtrag!

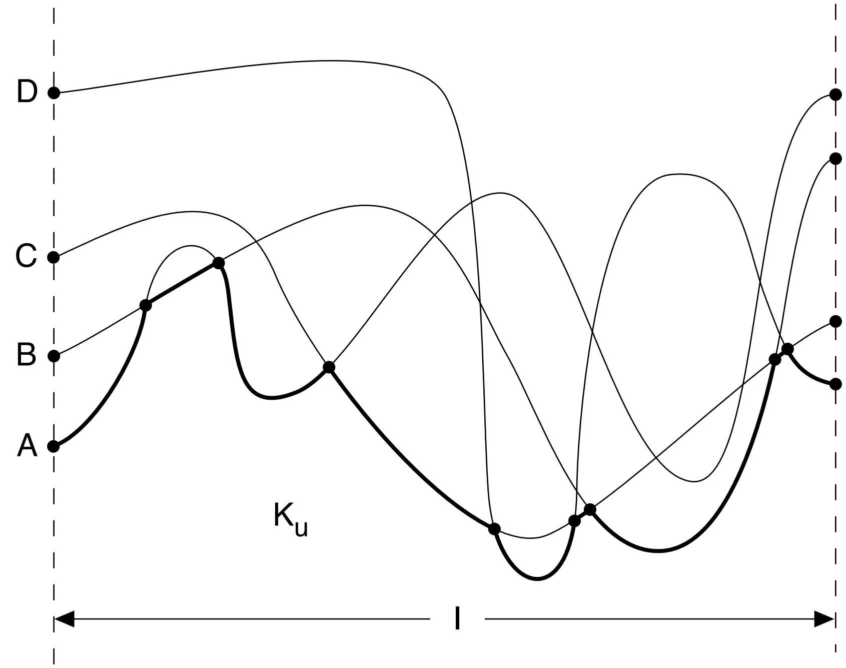
- Bisher Lineares Modell, wesentliche Prinzipien
- Algebraisches Modell, erweiterte Funktionsauswertung
- Beispiel: $\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$
- Rechenschritte einzeln Zählen
- Untere Schranken Aussagen gelten auch im algebraischen Modell

Reduktion: ϵ-Closeness $\leq_p$ Schnitt Liniensegmente

Lemma 2.6 Das Existenzproblem für den Schnitt von n Liniensegmenten hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n)$. Das Aufzählungsproblem für k Schnittpunkte hat Zeitkomplexität $\Omega(n \log n + k)$.

- 1. Fall: Annahme $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$
- Bilde spez. Geraden mit Steigung 1 und -1, wende Schnittalgorithmus an
- Falls erfolgreich: fertig, sonst zumindest $|x_i - x_j| > \epsilon$ für alle $i \neq j$
- 2. Fall: Bilde spez. Geraden mit Mittelpunkt x_i und verschiedene Steigungen

Untere Konturen von Funktionen



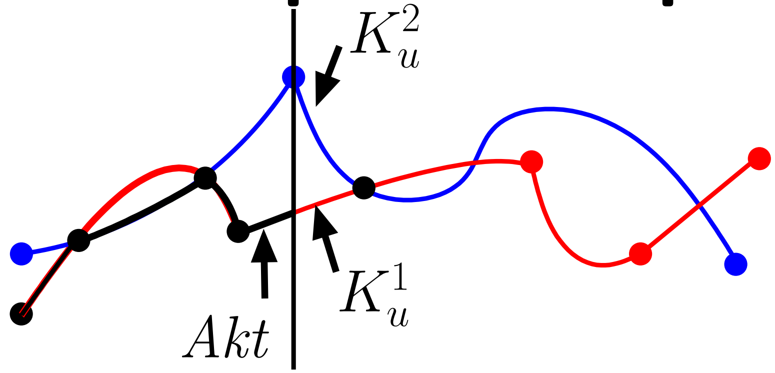
- n stetige Funktionen f_i über I, bilde das Minimum(Maximum) $f(x) := \min_i f_i(x)$ über Intervall I

Erweiterung Theorem Liniensegment-Schnitte

Theorem 2.11 Mit dem Sweep-Verfahren aus Abschnitt 2.3.2 lassen sich die k Schnittpunkte von n verschiedenen X-monotonen Wegen in Zeit $O((n+k)\log n)$ berechnen.

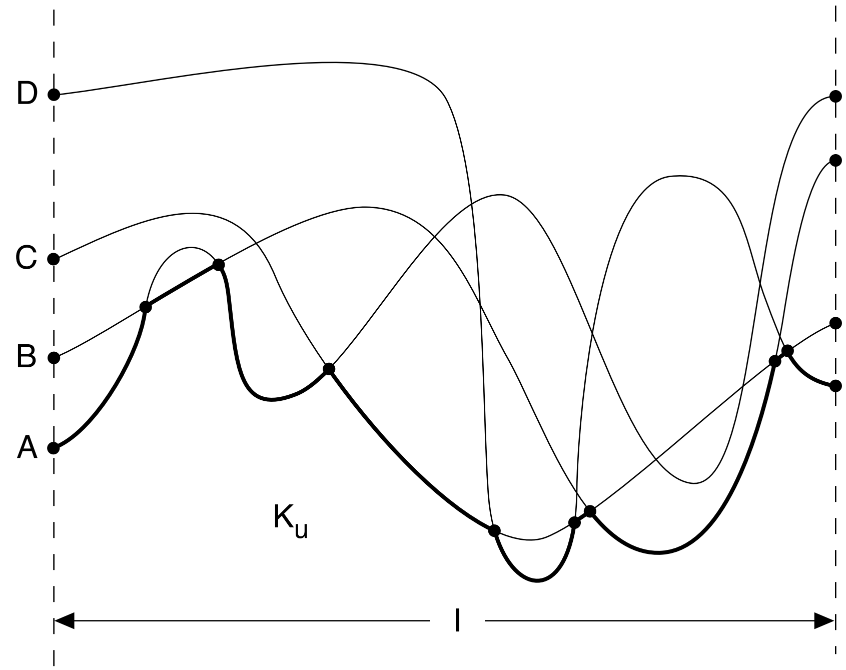
- Sweep geht genauso, Ordnung entlang Sweepline ok
- Nächster Schnittpunkt in $O(1)$ (mehrere möglich)
- Auch die untere Kontur damit berechnen! Nicht effizient, $k \leq s\frac{n(n-1)}{2}$

Divide-and-Conquer, Sweep im Merge



- Ereignisse: Konturpunkte (Sukzessive Rekursion), Schnittpunkt (nur der nächste)
- SSS: Aktuelle Segmente Konturen (Zeiger), Momentanes unteres Segment
- Ereignisverarbeitung: Schnitttest (Schnittereignis), Unteres Segment einfügen
- Laufzeit: Komplexität von K_u^1 und K_u^2 und $(K^1 \cup K^2)_u$

Berechnung Kontur! Komplexität!



Divide and Conquer mit Sweep im Merge-Schritt!

Lemma 2.12: Für alle $s, n \geq 1$ gilt $2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n)$

Berechnung Kontur!

Theorem 2.13 Die untere Kontur von n verschiedenen X monotonen Wegen über einem gemeinsamen Intervall, von denen sich je zwei höchstens s-mal schneiden, kann in Zeit $O(\lambda_s(n) \log n)$ berechnet werden.

Definition $\lambda_s(n)$: Machimale Komplexität der Kontur bei obigen Bedingungen. Abschätzen!

Lemma 2.12: Für alle $s, n \geq 1$ gilt $2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n)$

Seiten Buch!

Kapitel 1.2.5 Seite 40 oben – S. 42 unten

Kapitel 2.3.3 Seite 78 Mitte – S. 83 oben