Zusammenfassung Voronoi Diagramme

Elmar Langetepe
University of Bonn

All neaerst neighbors! Untereinander!

Nächster Nachbar liegt in Nachbarzelle! Allgemeiner zwei Mengen!

Lemma 5.7 Sei $S = P \cup Q$ eine Zerlegung der endlichen Punktmenge S in zwei disjunkte, nicht-leere Teilmengen P und Q. Seien $p_0 \in P$ und $q_0 \in Q$ so gewählt, dass

$$|p_0 q_0| = \min_{p \in P,\ q \in Q} |pq|$$

gilt. Dann haben die Regionen von p_0 und q_0 im Voronoi-Diagramm $V(S)$ eine gemeinsame Kante.

Beweis: Lokal, Dreiecksungleichung

Weitere Anwendungen: All neaerst neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von p in S sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit $VR(p, S)$ eine gemeinsame Kante besitzt.

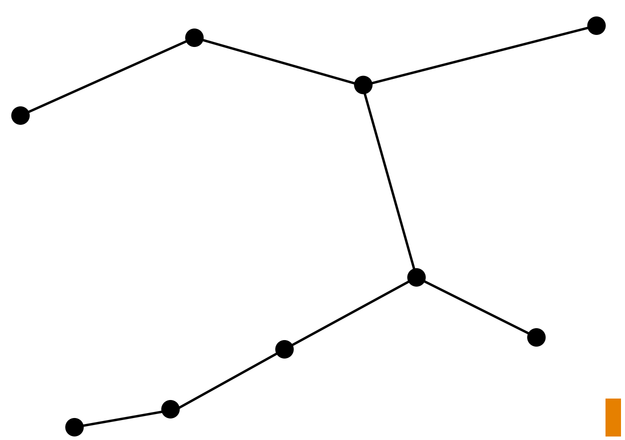
Beweis: $\{p\}$ und $S \setminus \{p\}$ als Mengen, Lemma 5.7

Theorem 5.9 Ist das Voronoi-Diagramm $V(S)$ vorhanden, kann in Zeit $O(n)$ für alle $p \in S$ der nächste Nachbar bestimmt werden.

Beweis: Durchlaufen des Diagramms (z.B. DFS)! Jede Kante zweimal besuchen!

Weitere Anwendungen: Minimum Spanning Tree

- Minimum Spanning Tree: Kleinster Graph, der alle Punkte enthält
- $G = (V, E)$, eine Zs.-hangskomp., nur Kanten aus E verwenden
- Kruskal: $O(|E| \log |E|)$ Laufzeit
- Punktmenge geg.: Vollst. Graph mit n^2 Kanten: $O(n^2 \log n)$
- Anzahl Kanten auf $O(n)$ beschränken



Anwendung MST: Traveling Salesman Problem

Theorem 5.12 Der Rundweg um einen MST ist weniger als doppelt so lang wie eine optimale TSP Tour.

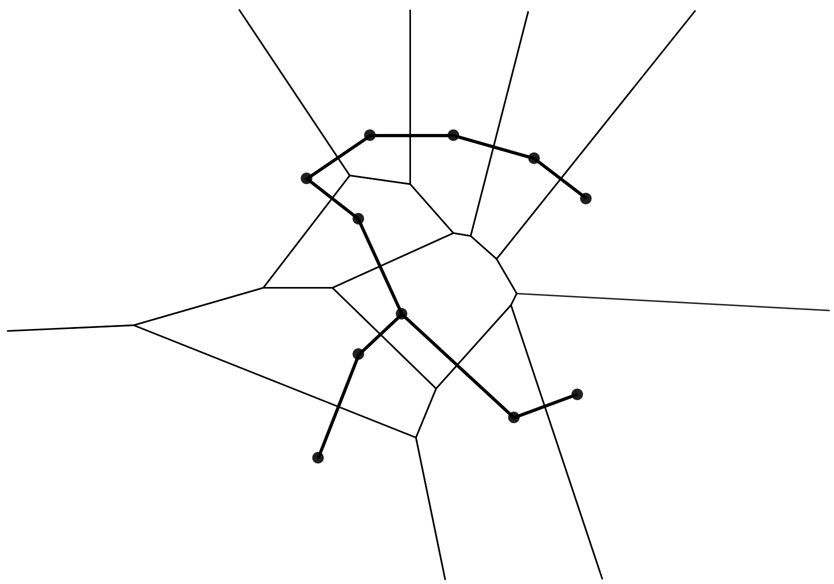
Beweis: $|\text{MST}| \leq |\text{TSP-Opt} \setminus \{e\}| \leq |\text{TSP-Opt}|$,
dann $2|\text{MST}| \leq 2|\text{TSP-Opt}|$

WH: Algorithmus von Kruskal

- Verwalte Wald von Bäumen
- Sukzessive Kante mit kürzester Länge auswählen
- Falls Teilbäume zusammenwachsen, einfügen
- Kanten nach Länge sortieren: $O(n^2 \log n)$

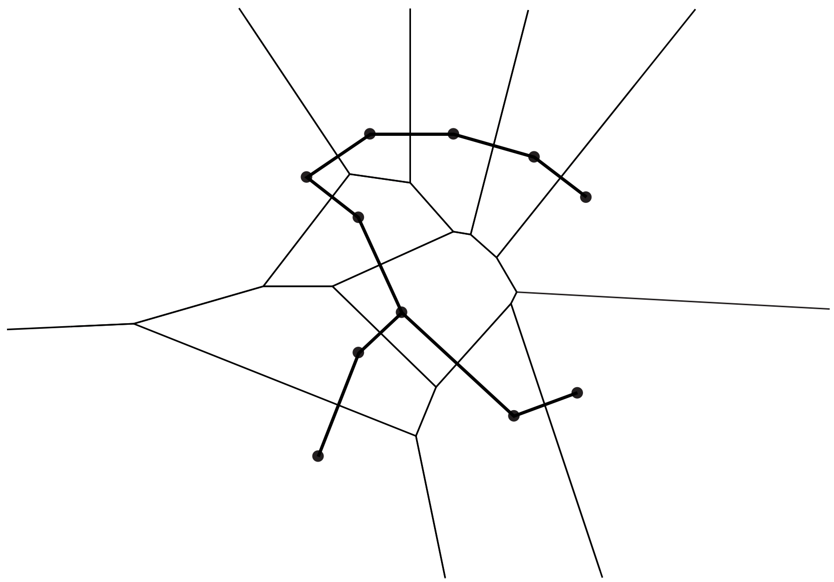
MST berechnen: Vorteil Voronoi-Diagramm

- Annahme: Voronoi Diagramm gegeben, Kruskal anwenden
- Lemma 5.7: Beim Ablauf von Kruskal nur Kanten anschauen, die auch nächste Nachbarn im VD sind
- Kantenmenge: Kanten zwischen Voronoi-Nachbarn: $O(n)$ viele, sortieren

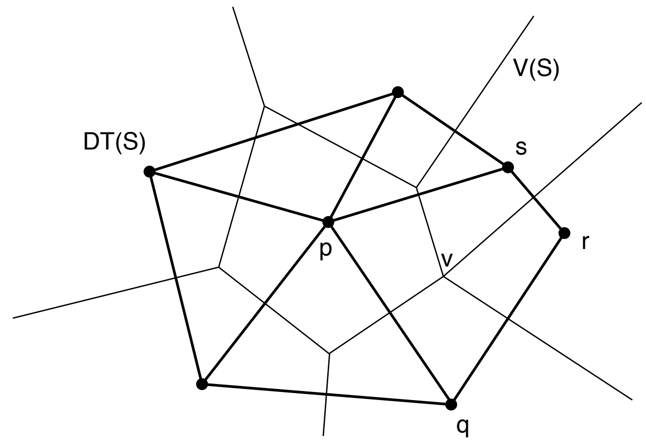


MST berechnen: Vorteil Voronoi-Diagramm

Theorem 5.11 Falls das Voronoi Diagramm $V(S)$ für n-elementige Punktmenge S gegeben ist, kann der MST in $O(n \log n)$ berechnet werden.



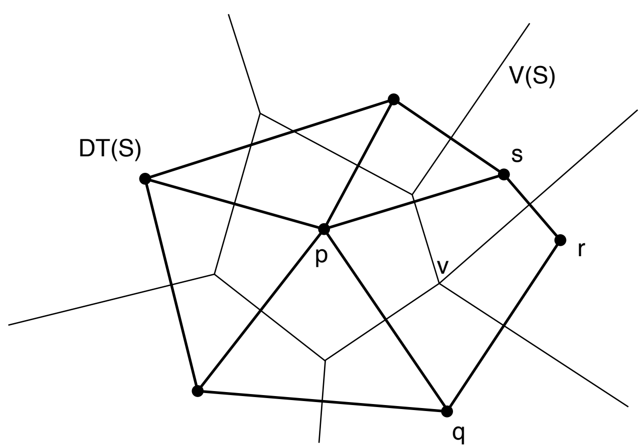
Dualer Graph von $V(S)$



- $V(S)$ gegeben: $VR(p,S)$ und $VR(q,S)$ gemeinsame Kante $\Longrightarrow$ pq heißt *Delaunay* Kante
- Menge aller Delaunay Kanten: Delaunay Zerlegung $DT(S)$
- Geometrische Realisation des Dualen Graphen von $V(S)$
- $MST(S)$, $CH(S)$ ist Teilmenge von $DT(S)$

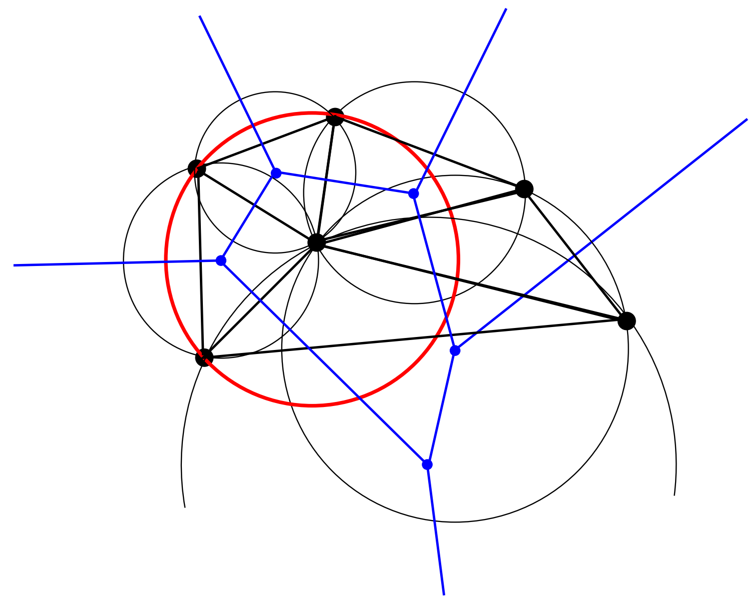
Delaunay Zerlegung $DT(S)$

- Allgemeine Lage: Keine 4 Punkte auf einem Kreis, keine drei Punkte auf einer Linie
- Jeder Voronoi Knoten hat Grad exakt 3
- $DT(S)$ ist Triangulation der Punktmenge: Delaunay Triangulation
- Sonst: Konvexe Flächen nachtriangulieren



Delaunay Dreieck: Unkreisdefinition

Lemma 5.18 Drei Punkte p, q, r aus S bilden genau dann ein Dreieck $tria(p, q, r)$ von $DT(S)$, wenn der eindeutig bestimmte Kreis $UK(p, q, r)$ durch p, q, r keinen anderen Punkt aus S im Inneren enthält.



Beweis: Allgem. Lage, Verwendung Lemma 5.1 (*Kuchenstück*)

Besonderheit: Delaunay Triangulation

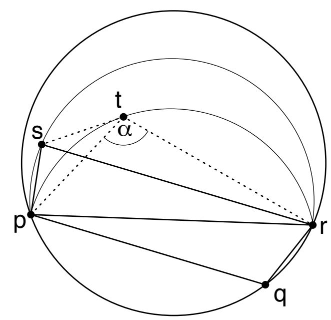
Theorem 5.17 Sei S eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage. Die Delaunay Triangulation von S hat unter allen Triangulationen von S die größte Winkelfolge hat.

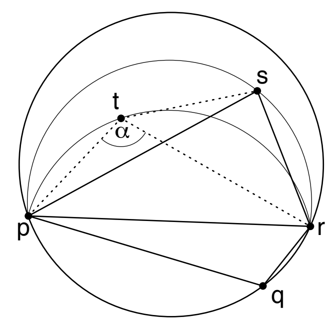
- Winkelfolge (Innenwinkel der Dreiecke, sortiert)
- $w(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3d})$
- $w(DT(S)) > w(T(S))$ nach lexikographischer Ordnung
- Triangulation $T(S)$ ungleich $DT(S)$ verbessern
- Zumindest ein Dreieck verletzt Umkreisbedingung
- Unter diesen ein spezielles Viereck finden
- Da einen Edge-Flip ausführen

Beweis!

Theorem 5.17 Sei S eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage. Die Delaunay Triangulation von S hat unter allen Triangulationen von S die größte Winkelfolge hat.

- t *sieht* pr mit max. Winkel
- t liegt im Nachbardreieck

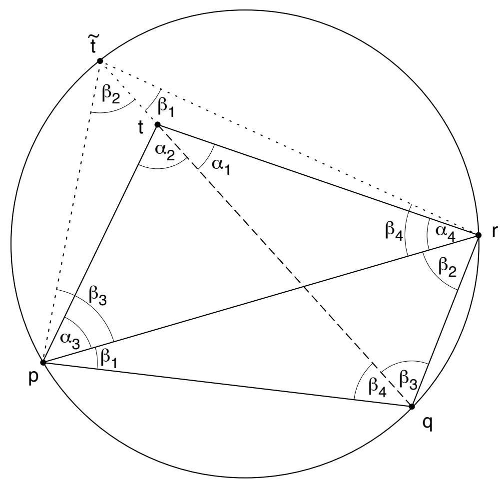




Beweis!

Theorem 5.17 Sei S eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage. Die Delaunay Triangulation von S hat unter allen Triangulationen von S die größte Winkelfolge hat.

- Edge-Flip verbessert Winkelfolge!
- Jeder neue Winkel $>$ als ein alter



Kapitel Buch

Kapitel 5.3 Seite 219 mitte – S. 226 unten

Kapitel 5.4 Seite 231 unten – S. 234 oben