Kernberechnung/Graphengrundlagen

Elmar Langetepe
University of Bonn

Kern in linearer Zeit

Theorem 4.26 Der Kern eines einfachen Polygones mit n Ecken kann in Zeit und Platz $O(n)$ berechnet werden.

Beweis:

- Maximale Teilfolge α_{max}: Sweep Maximum Subvektor $O(n)$
- Daraus die Folgen F und B: Je $O(n)$
- Schnitt der Halbebenen der Folgen F und B, sortiert nach Steigung: Je $O(n)$
- Schnitt zweier konvexer Mengen: Untere/Obere Kontur X-monotoner Ketten in jeweils $O(n)$
- Beispiel Tafel!

Grundlagen Graphentheorie

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden
  Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

    Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

    Kanten auf einfache Wege abbilden

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

  Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

  Kanten auf einfache Wege abbilden

  Ergebnis: Geometrischer Graph $G' = (V', E')$

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

  Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

  Kanten auf einfache Wege abbilden

  Ergebnis: Geometrischer Graph $G' = (V', E')$
- Geometrischer Graph kreuzungsfrei:

  (Kanten)schnittfreie Realisation

Grundlagen Graphentheorie

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

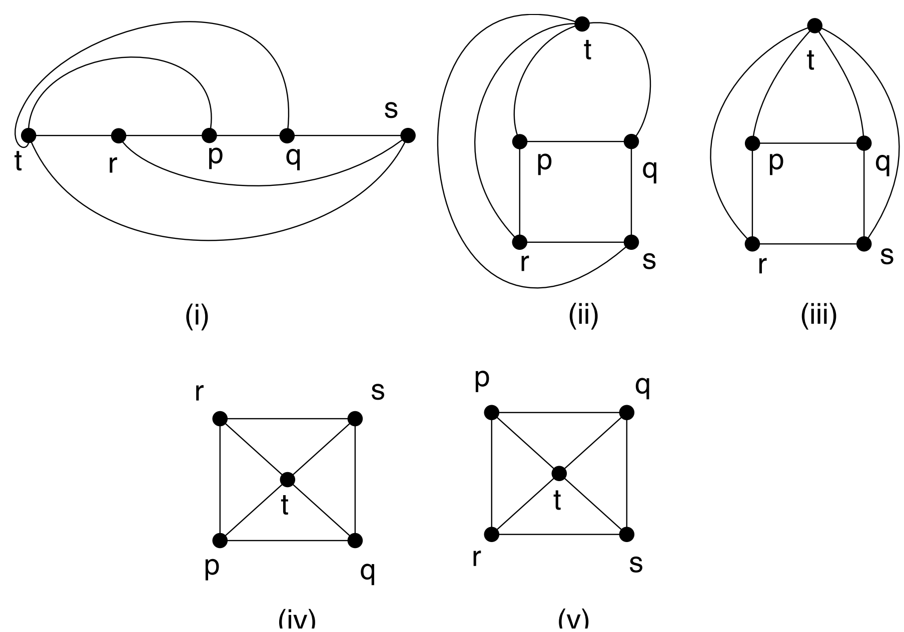
  Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

  Kanten auf einfache Wege abbilden

  Ergebnis: Geometrischer Graph $G' = (V', E')$
- Geometrischer Graph kreuzungsfrei:

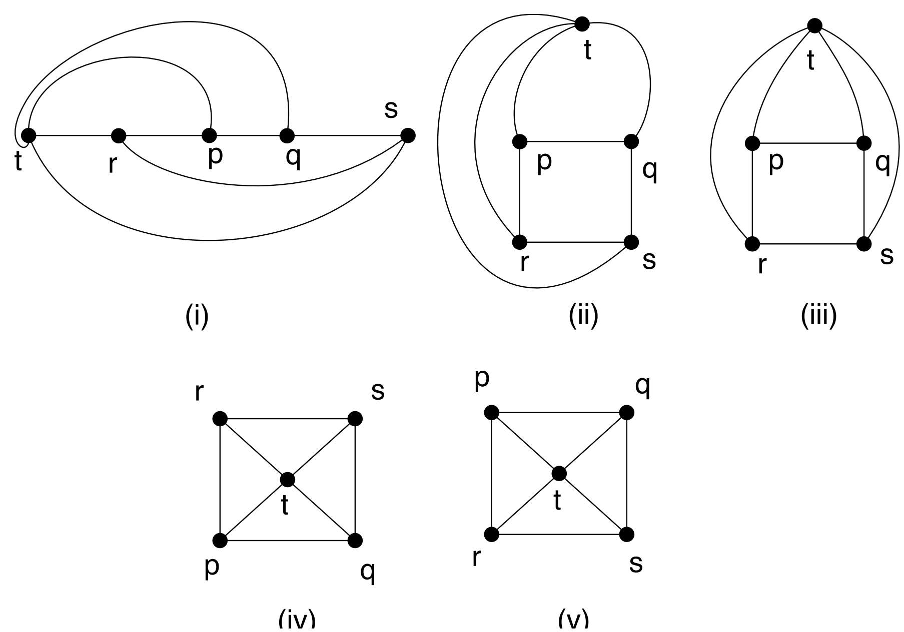
  (Kanten)schnittfreie Realisation
- $G = (V, E)$ planar: Es ex. kreuzungsfreie geometrische Realisation

Planare Graphen



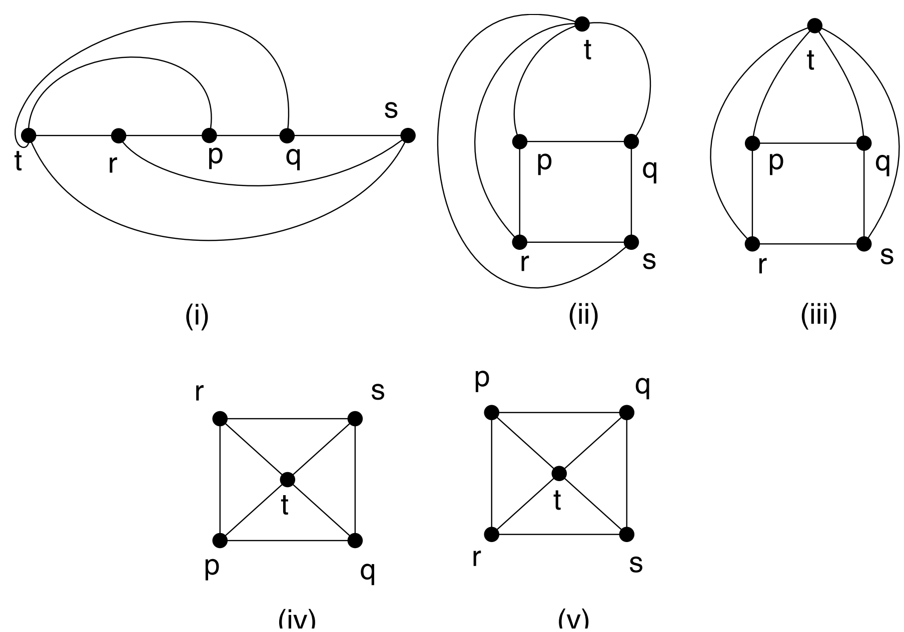
Planare Graphen

- Freiheit in der Wahl der Wege und Punkte



Planare Graphen

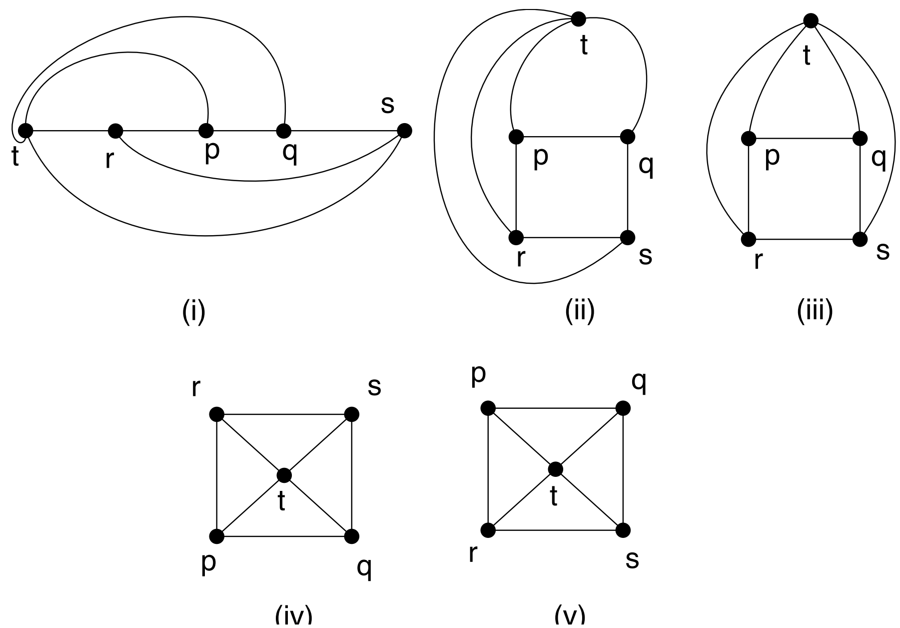
- Freiheit in der Wahl der Wege und Punkte
- Äquivalente Realisationen: $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$



Planare Graphen

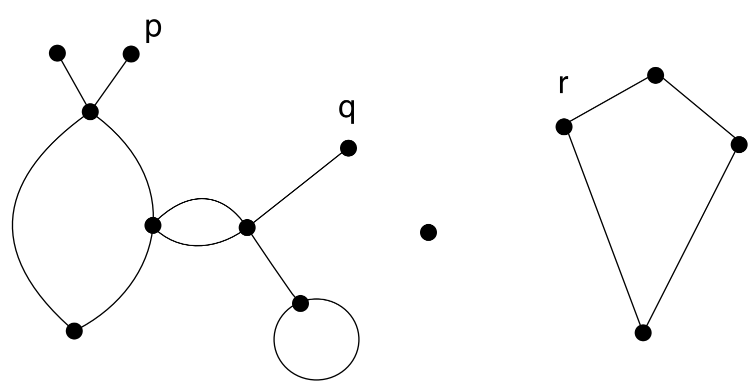
- Freiheit in der Wahl der Wege und Punkte
- Äquivalente Realisationen: $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$

  (V', E') durch verschieben der Punkte, Verformung der Wege in (V'', E'') überführen, ohne Wege über Knoten zu *heben*



Kreuzungfr. geometr. Graph: Bezeichnungen

- v Anzahl Knoten (Vertex)
- e Anzahl Kanten (Edge)
- f Anzahl Flächen (Face) (Zs.-hangskomp. von $\mathbb{R}^2 \setminus G$)
- c Anzahl Zusammenhangskomponenten von G (Component)



Kreuzungfreier geometrischer Graph: Eulerformel

Kreuzungfreier geometrischer Graph: Eulerformel

Theorem 1.1 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph im $\mathbb{R}^2$. Dann gilt: v-e+f=c+1.

Kreuzungfreier geometrischer Graph: Eulerformel

Theorem 1.1 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph im $\mathbb{R}^2$.
Dann gilt: v-e+f=c+1.

Beweis:

Kreuzungfreier geometrischer Graph: Eulerformel

Theorem 1.1 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph im $\mathbb{R}^2$.
Dann gilt: v-e+f=c+1.

Beweis: Strukturelle Induktion!

Einfache nützliche Folgerungen

Einfache nützliche Folgerungen

Korollar 1.2 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph, dessen Knoten den Grad ≥ 3 haben. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{A)}\ v &\leq \frac{2}{3}e \\
\text{B)}\ v &\leq 2(f-c-1) < 2f \\
\text{C)}\ e &\leq 3(f-c-1) < 3f.
\end{aligned}$$

Der Rand einer Fläche hat im Mittel ≤ 6 Kanten.

Einfache nützliche Folgerungen

Korollar 1.2 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph, dessen Knoten den Grad ≥ 3 haben. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{A) } v &\leq \frac{2}{3}e \\
\text{B) } v &\leq 2(f-c-1) < 2f \\
\text{C) } e &\leq 3(f-c-1) < 3f.
\end{aligned}
$$

Der Rand einer Fläche hat im Mittel ≤ 6 Kanten.

Beweis: Zählargumente!

Umkehrung für schlichte Graphen

Umkehrung für schlichte Graphen

Korollar 1.3 G kreuzungsfrei, nichtleer und schlicht, Grad der Knoten ≥ 3: Dann ist

i) $f \leq \frac{2}{3}e$ und

ii) $f < 2v$.

Umkehrung für schlichte Graphen

Korollar 1.3 G kreuzungsfrei, nichtleer und schlicht, Grad der Knoten ≥ 3: Dann ist

i) $f \leq \frac{2}{3}e$ und

ii) $f < 2v$.

Beweis! i)

Folgerung aus Eulerformel

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Beweis: $v = 5$, $e = 10$, $c = 1$, $f = ?$

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Beweis: $v = 5$, $e = 10$, $c = 1$, $f = ?$
$5 - 10 + f = 2$ oder $f = 7$ aber schlicht!

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Beweis: $v = 5$, $e = 10$, $c = 1$, $f = ?$

$5 - 10 + f = 2$ oder $f = 7$ aber schlicht!

$f \leq \frac{2}{3}e$

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

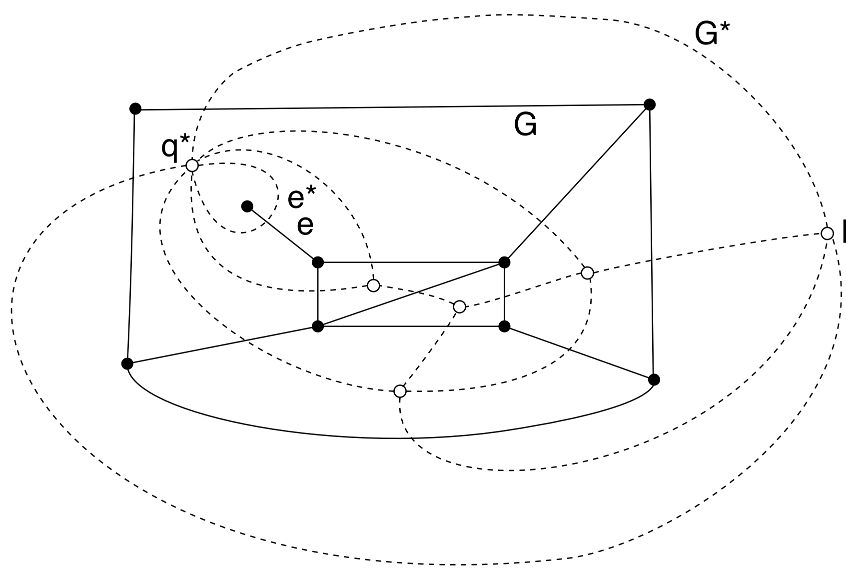
Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Beweis: $v = 5$, $e = 10$, $c = 1$, $f = ?$

$5 - 10 + f = 2$ oder $f = 7$ aber schlicht!

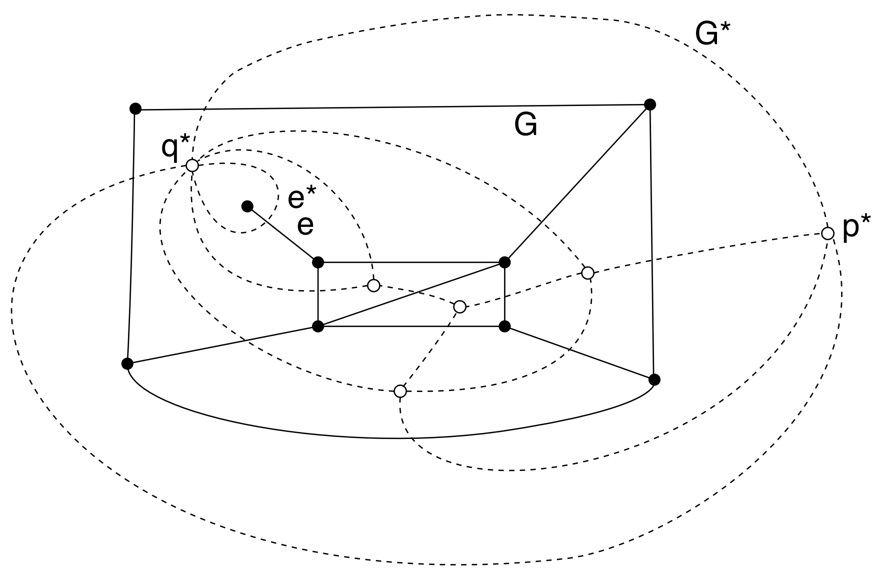
$f \leq \frac{2}{3}e$ Widerspruch $21 \not\leq 20$!

Dualer Graph



Dualer Graph

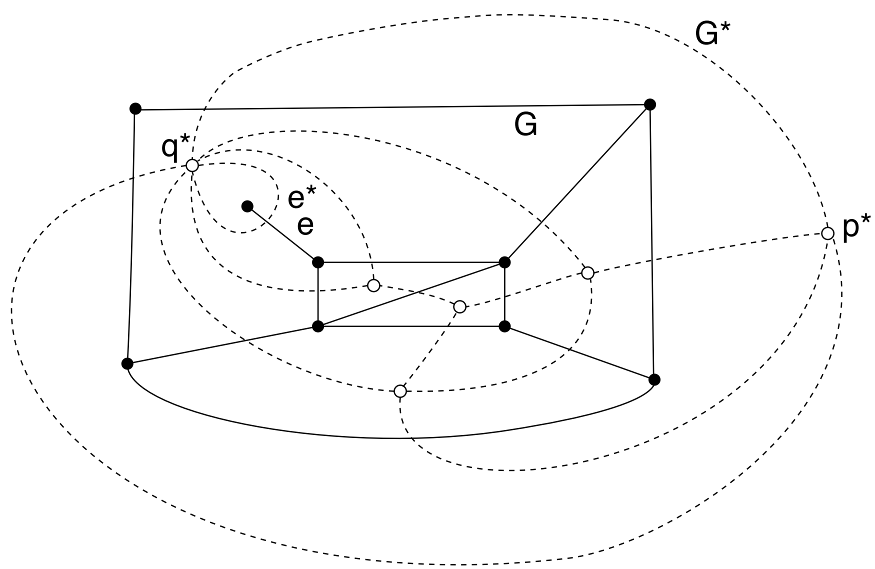
Nichtleerer, kreuzungsfreier, zusammenhängender, geometrischer Graph $G = (V, E)$. Dualer Graph G^*



Dualer Graph

Nichtleerer, kreuzungsfreier, zusammenhängender, geometrischer Graph $G = (V, E)$. Dualer Graph G^*

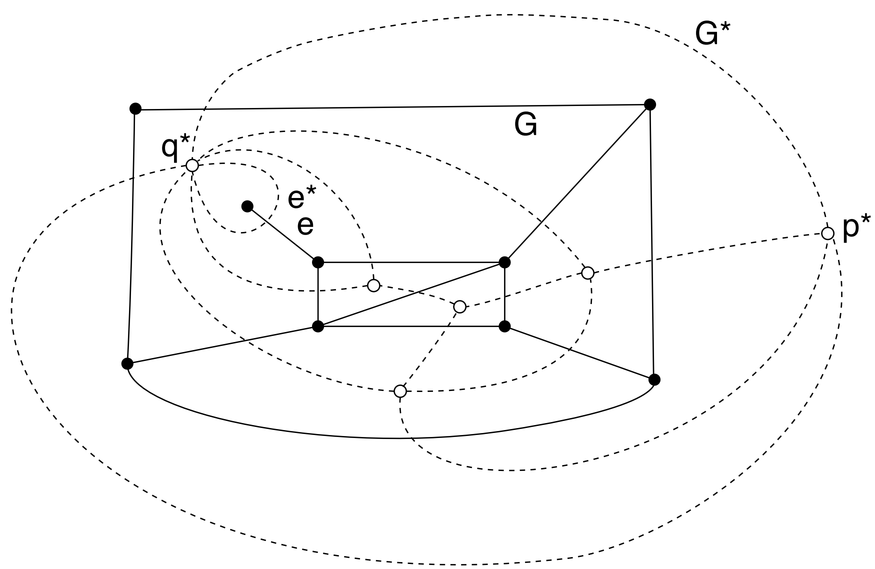
- Wähle Punkt p_F^* im Innern jedes Fs



Dualer Graph

Nichtleerer, kreuzungsfreier, zusammenhängender, geometrischer Graph $G = (V, E)$. Dualer Graph G^*

- Wähle Punkt p^*_F im Innern jedes Fs
- Für jede Kante e von G mit angrenzenden Flächen F_1 und F_2: Bilde Kante zwischen $p^*_{F_1}$ und $p^*_{F_2}$ die nur e kreuzt



Einfache nützliche Folgerungen

Einfache nützliche Folgerungen

Zeige: G kreuzungsfrei, nicht leer, schlicht, alle Knoten Grad ≥ 3

$\Rightarrow e < 3v$ (Dualität)

Einfache nützliche Folgerungen

Zeige: G kreuzungsfrei, nicht leer, schlicht, alle Knoten Grad ≥ 3

$\Rightarrow e < 3v$ (Dualität)

Korollar 1.2 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph, dessen Knoten den Grad ≥ 3 haben. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{A) } v &\leq \frac{2}{3}e \\ \text{B) } v &\leq 2(f-c-1) < 2f \\ \text{C) } e &\leq 3(f-c-1) < 3f. \end{aligned}$$

Der Rand einer Fläche hat im Mittel ≤ 6 Kanten.

Umkehrung für schlichte Graphen

Umkehrung für schlichte Graphen

Korollar 1.3 G kreuzungsfrei, nichtleer und schlicht, Grad der Knoten ≥ 3: Dann ist

i) $f \leq \frac{2}{3}e$ und

ii) $f < 2v$.

Umkehrung für schlichte Graphen

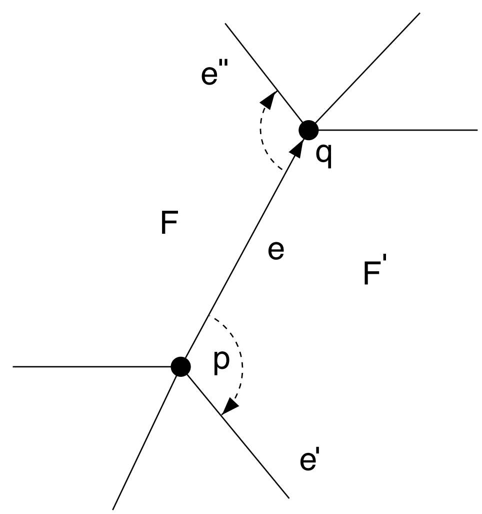
Korollar 1.3 G kreuzungsfrei, nichtleer und schlicht, Grad der Knoten ≥ 3: Dann ist

i) $f \leq \frac{2}{3}e$ und

ii) $f < 2v$.

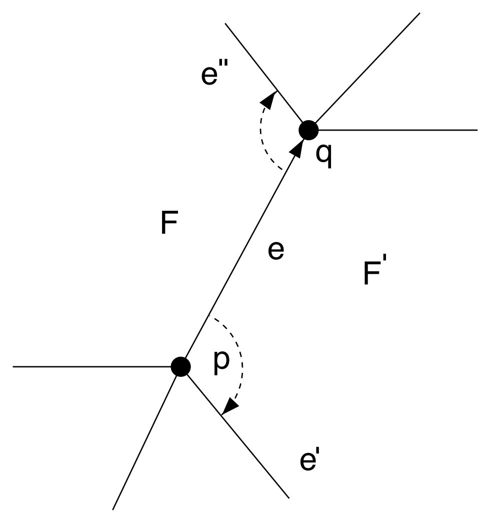
Beweis! ii) (Dualität)

Datenstrukturen



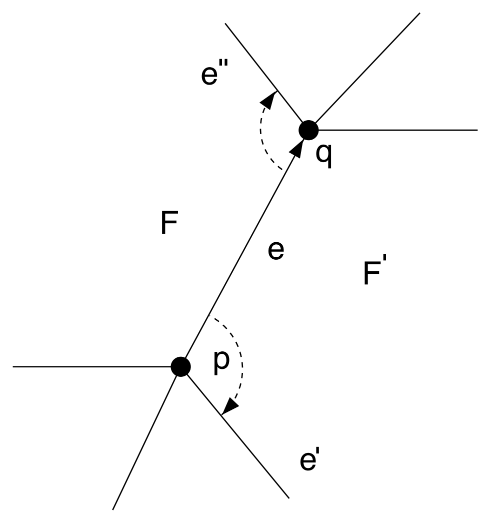
Datenstrukturen

- Kreuzungsfrei geometrisch, geradliniege Kanten



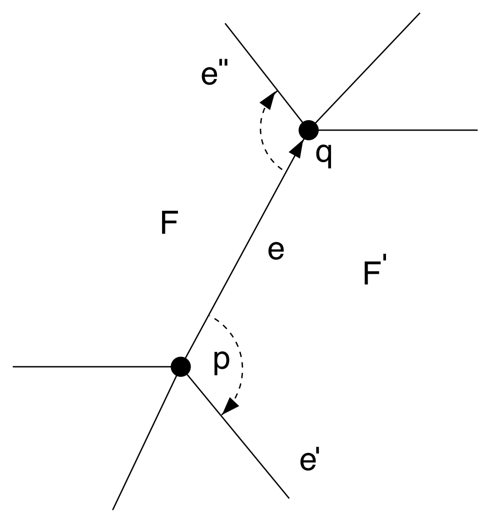
Datenstrukturen

- Kreuzungsfrei geometrisch, geradliniege Kanten
- Abspeichern und Umlaufen (z.B. Flächen)



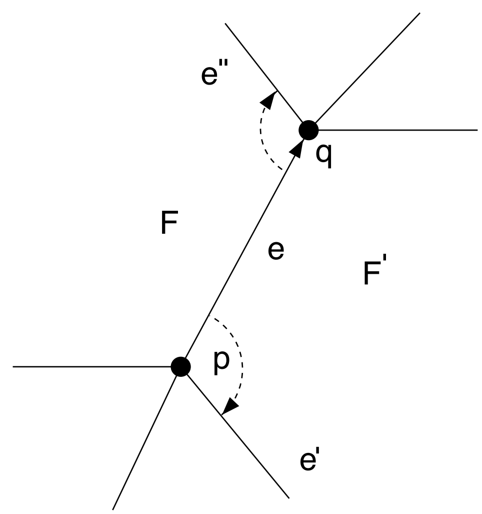
Datenstrukturen

- Kreuzungsfrei geometrisch, geradliniege Kanten
- Abspeichern und Umlaufen (z.B. Flächen)
- Doubly Connected Edge List: Verweislisten



Datenstrukturen

- Kreuzungsfrei geometrisch, geradliniege Kanten
- Abspeichern und Umlaufen (z.B. Flächen)
- Doubly Connected Edge List: Verweislisten
- Adjazenzlisten, viele Andere, 3D



Kap. 5: Voronoi Diagramme

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ im $\mathbb{R}^2$

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ im $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ im $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ im $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften
- Definition, Strukturelle Eigenschaften, Duales

Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ im $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften
- Definition, Strukturelle Eigenschaften, Duales
- Kap. 6: Berechnungsalgorithmen, Sweep, Inkrementell

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p,q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p,q)$ zerlegt die Ebene in:

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$ zerlegt die Ebene in:
  $D(p, q) =:= \{x \in R^2 || px| < |qx|\}$ und
  $D(q, p) =:= \{x \in R^2 || px| > |qx|\}$

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$ zerlegt die Ebene in:
  $D(p, q) =:= \{x \in R^2 || px| < |qx|\}$ und
  $D(q, p) =:= \{x \in R^2 || px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von p bezgl. Punktmenge S:
  $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$ zerlegt die Ebene in:
  $D(p, q) =:= \{x \in R^2 || px| < |qx|\}$ und
  $D(q, p) =:= \{x \in R^2 || px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von p bezgl. Punktmenge S:
  $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$
  Alle Punkte, die näher an p liegen als
  an jedem anderen Punkt aus S

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$ zerlegt die Ebene in:
  $D(p, q) =:= \{x \in R^2 || px| < |qx|\}$ und
  $D(q, p) =:= \{x \in R^2 || px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von p bezgl. Punktmenge S:
  $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$
  Alle Punkte, die näher an p liegen als
  an jedem anderen Punkt aus S
- $VR(p, S)$ ist offene Menge, Rand gehört nicht dazu

Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. S

- Abstand, Ort $p = (p_1, p_2)$, Punkt $x = (x_1, x_2)$:
  $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2) + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte: $B(p, q) := \{x \in R^2 || px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$ zerlegt die Ebene in:
  $D(p, q) =:= \{x \in R^2 || px| < |qx|\}$ und
  $D(q, p) =:= \{x \in R^2 || px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von p bezgl. Punktmenge S:
  $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$
  Alle Punkte, die näher an p liegen als
  an jedem anderen Punkt aus S
- $VR(p, S)$ ist offene Menge, Rand gehört nicht dazu
- Voronoi-Diagramm: $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) | p \in S\}$

- Das was stehen bleibt: Graph $G = (V, E)$